Доклады Академии Наук СССР
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS

МАТЕМАТИКА

Г. Н. ДУБОШИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(*Представлено академиком А. Н. Крыловым 14 XI 1934*)

Пусть нам дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=X_1,\ \frac{dx_2}{dt}=X_2,\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dt}=X_n, \tag{1}$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — данные функции t и $x_1, x_2, \ldots, x_n$, голоморфные относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обращающиеся в нуль при

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0.$$

Как известно, тривиальное решение системы (1)

$$x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0 \tag{2}$$

будет устойчивым в смысле Ляпунова, если возможно найти такую знакоопределенную функцию V, полная производная которой V', в силу уравнений (1) или будет тождественно равна нулю или будет также знакоопределенной функцией, но противоположного знака с V.

Наоборот, если возможно найти такую функцию V, что ее полная производная V' есть знакоопределенная функция, а сама функция V или знакоопределенная того же знака, как и V', или знакопеременная, то решение (2) будет неустойчивым.

К сожалению, общих методов для конструирования функции V не существует, и решение этой задачи существенно зависит от искусства исследователя.

В настоящей заметке мы укажем некоторые приемы, позволяющие построить такую функцию в случае, когда система (1) имеет каноническую форму.

Итак, пусть мы имеем каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{dH}{dy_i},\ \frac{dy_i}{dt}=-\frac{dH}{dx_i}. \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

Мы предположим сначала, что характеристическая функция H не зависит от t и есть голоморфная функция переменных x_i, y_i, не содержащая в своем разложении членов ниже второго порядка.

А. М. Ляпуновым было указано, что если H есть знакоопределенная функция, то тривиальное решение

$$x_1=0,\ x_2=0,\ \ldots,\ x_n=0,\ y_1=0,\ y_2=0,\ \ldots,\ y_n=0 \tag{4}$$

устойчиво. Это следует из того, что в данном случае за функцию V можно взять саму функцию H, полная производная которой тождественно равна нулю в силу уравнений (3).

Рассмотрим теперь случай, когда H есть знакопеременная функция. Тогда имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. *Если возможно найти такую функцию W от переменных x_i, y_i, что функция $W+H$ будет знакоопределенной, а скобка Пуассона (W, H) или также будет знакоопределенной, но противоположного знака с $W+H$ или тождественно равна нулю, то решение (4) устойчиво.*

Действительно, если такая функция существует, то мы положим

$$V = W + H,$$

откуда

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial W}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dt} \right)$$

или, ввиду уравнений (3)

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial W}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = (W, H),$$

откуда и вытекает справедливость теоремы.

Теорема 2. *Если возможно найти такую функцию W, что скобка Пуассона (W, H) будет знакоопределенной функцией, а функция $W+H$ или также знакоопределенной одинакового знака с (W, H) или знакопеременной, то решение (4) неустойчиво.*

Доказательство этой теоремы совершенно аналогично предыдущему.

Для иллюстрации доказанных теорем рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть имеем каноническую систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

где

$$2H = ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2H_3(x, y) = 2H_0 + 2H_3,$$

причем a, b, c суть постоянные, а $H_3(x, y)$ есть голоморфная функция своих переменных, не содержащая в своем разложении членов ниже третьего порядка. Исследуем устойчивость решения

$$x = 0, \quad y = 0. \tag{5}$$

Мы можем различать здесь следующие случаи:

1. $\Delta = ac - b^2 > 0$. Тогда H_0 есть знакоопределенная квадратичная форма и, следовательно, H есть знакоопределенная функция. Следовательно, решение (5) устойчиво.

2. $\Delta = ac - b^2 < 0$. Тогда H_0 есть знакопеременная квадратичная форма и, следовательно, H есть знакопеременная функция. Докажем, что решение (5) неустойчиво. Действительно, если a и c имеют одинаковые знаки, то мы положим

$$2W = -ay^2 + cx^2,$$

откуда

$$2(W + H) = 2bxy + 2cx^2 + H_3(x, y)$$

и

$$(W, H) = aby^2 + 2acxy + cbx^2 + cx \frac{\partial H_3}{\partial y} + ay \frac{\partial H_3}{\partial x}.$$

Очевидно, что $W+H$ есть знакопеременная функция. Но (W, H) есть знакоопределенная функция, так как дискриминант формы $aby^2+2acxy+cbx^2$

$$\overline{\Delta}=ac(b^2-ac)$$

положителен. По теореме 2, решение (5) неустойчиво. Если a и c имеют разные знаки и $b\neq 0$, то мы положим

$$2W=ay^2+cx^2,$$

откуда

$$2(W+H)=2ay^2+2bxy+2cx^2+2H_3(x, y)$$

и

$$(W, H)=-aby^2+cbx^2+cx\frac{\partial H_3}{\partial y}-ay\frac{\partial H_3}{\partial x}.$$

Очевидно, что $W+H$ есть знакопеременная функция, а (W, H) — знакоопределенная. Следовательно, решение (5) неустойчиво.*

Пример 2. Пусть мы имеем систему четвертого порядка с характеристической функцией

$$H=\frac{1}{2}(a_1y_1^2-a_2y_2^2+b_1x_1^2-b_2x_2^2)+H_3(x_1, y_1)+H_4(b_2x_2^2+a_2y_2^2),$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — произвольные положительные числа, а H_3 и H_4 суть голоморфные функции своих переменных, из которых первая не содержит в своем разложении членов ниже третьего порядка относительно x_1, y_1, а вторая — членов ниже второго порядка относительно $b_2x_2^2+a_2y_2^2$. Покажем, что тривиальное решение

$$x_1=x_2=y_1=y_2=0$$

соответствующей канонической системы — устойчиво.

Действительно, если мы положим,

$$W=a_2y_2^2+b_2x_2^2,$$

то функция

$$W+H=\frac{1}{2}(a_1y_1^2+a_2y_2^2+b_1x_1^2+b_2x_2^2)+H_3+H_4,$$

будет знакоопределенной, а скобка Пуассона (W, H), как легко проверить, тождественно равна нулю. По теореме 1 решение устойчиво.

Перейдем теперь к случаю, когда H зависит также и от времени. В этом случае имеют место следующие теоремы, доказательство которых совершенно аналогично доказательству двух первых теорем:

Теорема 3. *Если H есть знакоопределенная функция, а ее частная производная по t, $\frac{\partial H}{\partial t}$, есть также знакоопределенная функция противоположного знака с H, то решение (4) устойчиво.*

Теорема 4. *Если возможно найти такую независящую от t функцию W, что функция $W+H$ будет знакоопределенной, а функция $(W, H)+\frac{\partial H}{\partial t}$ будет тождественно равна нулю или также будет знакоопределенной противоположного знака с $W+H$, то решение (4) устойчиво.*

Теорема 5. *Если возможно найти такую независящую от t функцию W, что функция $(W, H)+\frac{\partial H}{\partial t}$ будет знакоопределенной, а функция $W+H$ или знакопеременной или знакоопределенной того же знака, как $(W, H)+\frac{\partial H}{\partial t}$, то решение (4) неустойчиво.*

* Аналогично можно рассмотреть случаи $\Delta<0$, $b=0$ и $\Delta=0$.

В качестве примера рассмотрим случай системы второго порядка с характеристической функцией

$$H=\left(1+\frac{1}{t}\right)y^2+2xy+\left(1+\frac{1}{t^2}\right)x^2+e^{-t}\cdot H_3(x, y),$$

где $H_3(x, y)$ — произвольная голоморфная функция, не содержащая в своем разложении членов ниже третьего порядка. Очевидно, что при $t>0$, H есть знакоопределенная положительная функция.

Так как

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{1}{t^2}y^2-\frac{2}{t^3}x^2-e^{-t}\cdot H_3(x, y)$$

для всякого $t>0$ есть знакоопределенная отрицательная функция, то тривиальное решение

$$x=0,\quad y=0$$

соответствующей канонической системы — устойчиво.

Государственный астрономический
институт им. П. К. Штернберга.
Москва.

Поступило
14 XI 1934.

MATHEMATICS

ON THE STABILITY OF SOLUTIONS OF CANONICAL SYSTEMS

By G. DUBOŠIN

(*Communicated by A. Krylov, Member of the Academy, 14.XI.1934*)

Let us take a system of differential equations

$$\frac{dx_1}{dt}=X_1,\ \frac{dx_2}{dt}=X_2,\ \ldots,\ \frac{dx_n}{dt}=X_n, \tag{1}$$

where $X_1,\ X,\ \ldots,\ X_n$ are the given functions of t and $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, holomorph with respect to the variables $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ and vanishing at

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0.$$

As we know, the trivial solution of the system (1)

$$x_1=0,\ x_2=0,\ x_n=0$$

will be stable in the sense of Liapounoff, if it is possible to find such a definite function V the total derivative of which V', according to equations (1) is either identically equal to zero or is also definite, but of the sign opposite to V. Conversely, if it is possible to find a function V the total derivative of which V' is definite, but the function V itself is either definite of the same sign as V' or of variable sign, then solution (2) will be unstable.

Unfortunately, there are no general methods of constructing the function V, and the solution of this problem greatly depends on the skill of the investigator. In this article we shall show several methods that permit to construct a function of this kind, provided system (1) is of the canonical form.

Let us take the canonical system of differential equations

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_i},\ \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}. \qquad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

Let us first assume that the characteristic function H does not depend on t and is a holomorph function of the variables $x_i,\ y_i$, which does not contain in its development terms of lower than the second order.

It has been pointed out by A. Liapounoff that if H is a definite function, then the trivial solution

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \ldots, x_n = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0, \ldots, y_n = 0 \qquad (4)$$

is stable. This follows from the fact that in this case it is possible to take, instead of the function V, the function H itself, the total derivative of which vanishes identically according to equations (3).

Now let us analyse the case when H is a function of variable sign. Then the following theorems hold:

Theorem 1. *If it is possible to find such a function W of the variables x_i, y_i that a function $W + H$ is definite, and Poisson's brackets (W, H) is also either definite but of the sign opposite to $W + H$ or identically equal to zero, then solution* (4) *is stable.*

Indeed, if such a function W exists, then we may put

$$V = W + H,$$

whence

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} \right),$$

or, because of equation (3),

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial y_i} - \frac{\partial W}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = (W, H),$$

whence the correctness of the theorem follows.

Theorem 2. *If it is possible to find such a function W that Poisson's brackets (W, H) is a definite function and a function $W + H$ is either also definite but of a sign identical with (W, H) or of variable sign, then solution* (4) *is unstable.* The demonstration of this theorem is the same as that of the first.

To illustrate the theorems given above, let us analyse two examples.

Example 1. Let us take the canonical system of the second order

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y},\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x},$$

where

$$2H = ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2H_3(x, y) = 2H_0 + 2H_3,$$

a, b, c being constants and $H_3(x, y)$ being a holomorph function of their variables which does not contain in its development terms of lower than the third order.

Let us investigate the stability of the solution

$$x = 0, \qquad y = 0. \qquad (5)$$

Here we may discern two cases, as follows:

1. $\Delta = ac - b^2 > 0$. Then H_0 is a definite quadratic form and, consequently, H is a definite function. Consequently, solution (5) is stable.

2. $\Delta = ac - b^2 < 0$. Then H_0 is an indefinite quadratic form and, consequently, H is a function of variable sign. Let us prove that solution (5) is unstable. Indeed, if a and c are of the same sign, we may put

$$2W = -ay^2 + cx^2,$$

whence

$$2(W + H) = 2bxy + 2cx^2 = H_3(x, y)$$

and

$$(W, H) = aby^2 + 2acxy + cbx^2 + cx\frac{\partial H_3}{\partial y} + ay\frac{\partial H_3}{\partial x}.$$

It is evident that $W+H$ is a function of variable sign. But (W, H) is a definite function, because of the discriminant of the form $aby^2+2acxy+cbx^2$

$$\Delta = ac(b^2 - ac),$$

being positive. According to theorem 2, solution (5) is unstable.

If a and c have different signs and $b \neq 0$, then we may put

$$2W = ay^2 + cx^2,$$

whence

$$2(W+H) 2ay^2 + 2bxy + 2cx^2 + 2H_3(x, y)$$

and

$$(W, H) = -aby^2 + cbx^2 + cx\frac{\partial H_3}{\partial y} - ay\frac{\partial H_3}{\partial x}.$$

It is evident that $W+H$ is a function of variable sign, and that (W, H) is a definite function. Consequently, solution (5) is unstable.*

Example 2. Let us take the system of the fourth order with the characteristic function

$$H = \frac{1}{2}(a_1 y_1^2 = a_2 y_2^2 + b_1 x_1^2 - b_2 x_2^2) + H_3(x_1, y_1) + H_4(b_2 x_2^2 + a_2 y_2^2),$$

where a_1, a_2, b_1, b_2 are any positive numbers, and H_3 and H_4 are any holomorph functions of their variables, the first of which does not contain in its development terms of lower than the third order relative to x_1, y_1 and the second — lower than the second order relative to

$$b_2 x_2^2 + a_2 y_2^2.$$

Let us show that the trivial solution

$$x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$$

of the corresponding canonical system is stable. Indeed, if we put

$$W = a_2 y_2^2 + b_2 x_2^2,$$

then the function

$$W+H = \frac{1}{2}(a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2) + H_3 + H_4,$$

is a definite function, and Poisson's brackets (W, H), as may be easily verified, vanish identically. According to theorem 1, the solution is stable.

Let us now investigate the case when H also depends on time. In this case, the following theorems, whose proof is quite analogous to that of the first two, hold:

Theorem 3. *If H is a definite function, and its partial derivative with respect to t, $\frac{\partial H}{\partial t}$, is also a definite function, but of the sign opposite to H, then solution* (4) *is stable.*

Theorem 4. *If it is possible to find such a function W independent of t that the function $W+H$ is a definite function, and the function $(W, H)+\frac{\partial H}{\partial t}$ vanishes identically or is also a definite function of the sign opposite to $W+H$, then solution* (4) *is stable.*

Treorem 5. *If it is possible to find such function W independent of t that the function $(W, H)+\frac{\partial H}{\partial t}$ is definite, and the function $W+H$ is either of variable sign or definite of the same sign as $(W, H)+\frac{\partial H}{\partial t}$, then solution* (4) *is unstable.*

* In a similar way we may analyse the cases $\Delta < 0$, $b = 0$, and $\Delta = 0$.

As an example we may analyse the case of the system of the second order with the characteristic function

$$H=\left(1+\frac{1}{t}\right)y^2+2xy+\left(1+\frac{1}{t^2}\right)x^2+e^{-t}\cdot H_3(x, y),$$

where $H_3(x, y)$ is any function that does not contain in its development terms of lower than the third order.

It is evident thas at $t>0$, H is a definite positive function. As

$$\frac{\partial H}{\partial t}=-\frac{1}{t^2}y^2-\frac{2}{t^3}x^2-e^{-t}\cdot H_3(x, y)$$

for every $t>0$ is a definite negative function, the trivial solution

$$x=y=0$$

of the corresponding canonical system is stable.

State Astronomical Institute.
Moscow.

Received
14.XI.1934.

МАТЕМАТИКА

А. БЕРМАНТ и М. ЛАВРЕНТЬЕВ

ОБ АБСОЛЮТНЫХ КОНСТАНТАХ ТИПА А. БЛОХА

(*Представлено академиком И. М. Виноградовым 1 XII 1934*)

1. Рассмотрим семейство функций $\{F(z)\}$

$$w=F(z)=z+a_2z^2+\ldots,$$

регулярных в круге $|z|<1$.

Известная теорема А. Блоха [1] состоит в следующем утверждении: риманова поверхность, производимая любой функцией семейства $\{F(z)\}$, содержит однолистный круг радиуса, не меньшего некоторой абсолютной константы B.

Из этой теоремы следует, что значения любой функции семейства покрывают круг (в плоскости w), радиус которого не меньше некоторой абсолютной константы $L\cdot(B\leqslant L)$.

Теорема о существовании константы L была в последующих работах (Монтель, Привалов, Валирон и др.) существенно дополнена. Наиболее сильным результатом в этом направлении является теорема Валирона (1926).

Обозначим через $C(R, \alpha)$, $R>0$, $0<\alpha<\pi$, всякую область, которая получается удалением из круга $|w|<R$ круга, видимого из начала координат под углом α, а через $R(\alpha, F)$ — наибольшее значение R, для которого существует область $C(R, \alpha)$, покрываемая значениями $F(z)$, при $|z|<1$. Валирон показал,что для каждого α, $0<\alpha<\pi$, существует положительная нижняя граница $V(\alpha)$ функционала $R(\alpha, F)$*.

До настоящего времени не известно как точных числовых значений констант B и L, так и вида функции $V(\alpha)$.**

В настоящей заметке мы имеем в виду отметить один результат аналогичной теореме Валирона. Для полученной при этом абсолютной функции нам удается дать ее точное аналитическое выражение.

* Заметим, что $V(0)=0$.

** Для различных подсемейств семейства $\{F(z)\}$ (функции однолистные ограниченные, удовлетворяющие условию $F(z)\neq 0$ при $z\neq 0$) мы имеем ряд точных оценок для различных областей, покрываемых значениями функций этих классов (Кебе, Ландау, Каратеодори, Рогозинский).

2. Обозначим через $C(R, \alpha, q)$ любую область, получаемую удалением из круга $|w|<R$ криволинейного четырехугольника

$$\varphi<\arg w<\varphi+\alpha, \quad 0\leqslant\varphi<2\pi, \quad r<|w|<qr, \quad 0<r<1.$$

Теорема. *Каковы бы ни были числа α и q, $0<\alpha<\pi$, $q>0$ и какова бы ни была функция $F(z)$ семейства $\{F(z)\}$, всегда существует область $C(V, \alpha, q)$, $V>0$, покрываемая значениями $F(z)$, $|z|<1$, где V зависит только от α и q. В случае, если α и q подчиняются условиям*

$$\left.\begin{aligned} &0<2\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant d, \qquad 0<\alpha<\pi \\ &1<q\leqslant\frac{1}{1-d}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где d — некоторое положительное число, меньшее единицы (ниже определяемое), $V(\alpha, q)$ равно меньшему из двух чисел

$$\frac{|\nu'(1-e^{-i\alpha})||1-e^{i\alpha}|}{2I\nu(1-e^{-i\alpha})}; \qquad \frac{|\nu'(1-q)|\cdot q(q-1)}{2I\nu(1-q)},$$

где ν — функция, обратная модулярной.

Полученные выражения для $V(\alpha, q)$ — окончательные: каково бы ни было $R>V(\alpha, q)$, существует функция семейства $\{F(z)\}$, значения которой при $|z|<1$ не покрывают никакой области $C(R, \alpha, q)$.

Существование и выражение для $V(\alpha, q)$ получаются из решения следующей экстремальной задачи:

Пусть $\{f(z)\}$ семейство функций $w=f(z)$, регулярных в круге $|z|<1$ и удовлетворяющих условиям:

1) $f(0)=0$.

2) *Значения $f(z)$ не покрывают никакой области $C(1, \alpha, q)$.*

Требуется определить верхнюю границу значений функционала $|f'(0)|$ для всех функций семейства $\{f(z)\}$.

Обозначая через $K(\alpha, q)$ указанную верхнюю границу, очевидно будем иметь

$$V(\alpha, q)=\frac{1}{K(\alpha, q)}.$$

3. Укажем кратко на характер решения экстремальной задачи.

Каждая функция $w=f(z)$ семейства $\{f(z)\}$ должна выпускать по крайней мере две точки $w=re^{i\varphi}$ и $w'=r'e^{i\varphi'}$, причем

$$r\leqslant r'<1,$$

$$|\varphi-\varphi'|>\alpha \quad \text{или} \quad |\varphi-\varphi'|\leqslant\alpha, \quad \frac{r'}{r}>q. \tag{2}$$

Всякую функцию $w=f(z)$, выпускающую кроме таких двух точек еще какие-нибудь другие или имеющую кратные точки, можно на основании принципа Линделефа[2] исключить из рассмотрения. Таким образом, функцию, дающую верхнюю границу для $|f'(0)|$, нужно искать среди функций модулярного типа, определенных в $|z|<1$, конечные исключительные значения которых удовлетворяют одному из условий (2).

Можно считать $w'=1$, что выделит из указанного семейства модулярных функций функции с наибольшими возможными „растяжениями“. При этом, растяжение σ (значение $|f'(0)|$) можно рассматривать как функцию второй выпускаемой точки w. С помощью ряда преобразований вопрос приводится к изучению выражения

$$\sigma=\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\left|\frac{w'}{u}\right||\zeta|\ln\left|\frac{1}{\zeta}\right|,$$

где $u = u(\zeta)$, $u(0) = 0$, — функция, реализующая конформное отображение некоторого криволинейного треугольника с нулевыми углами на верхнюю полуплоскость. Каждому значению ζ (или u) соответствует определенное значение второй выпускаемой точки w и, следовательно, определенная функция модулярного типа.

4. Точке $\zeta = u = 0$ отвечает $w = 1$, что приводит к случаю совпадения двух выпускаемых точек, причем $\sigma = \infty$. Во всех остальных конечных точках полуплоскости u, σ есть непрерывная функция.

Сектору $|w| \leqslant 1$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \alpha$ соответствует некоторая конечная область в плоскости u, где функция σ достигает максимума $\sigma = K_1(\alpha)$ пусть в точке u_1. Последней пусть отвечает точка w_1. Следовательно, $K_1(\alpha)$ есть растяжение в начале координат модулярной функции, определенной в $|z| < 1$ и выпускающей три значения: 1, w_1, ∞.

Сектору $|w| \leqslant \frac{1}{q}$, $-\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ соответствует также некоторая конечная область в плоскости u, где функция σ достигает максимума $\sigma = K_2(\alpha, q)$, пусть в точке u_2. Последней пусть отвечает точка w_2. Следовательно, $K_2(\alpha, q)$ есть растяжение в начале координат модулярной функции, выпускающей три значения: 1, w_2, ∞.

Большее из чисел $K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha, q)$ и является искомым значением функции $K(\alpha, q)$.

При α и q, удовлетворяющих условиям (1), можно указать точное положение точек w_1 и w_2.

Линии „равного растяжения“ $\sigma = C \geqslant C_0$ в ограниченной области при достаточно большом C_0 будут простыми, выпуклыми, замкнутыми кривыми линиями, окружающими точку $w = 1$ и вложенными одна в другую.

Обозначим через d такое число, что линии „равного растяжения“, проходящие через любую точку w, $|w - 1| \leqslant d$, обладают всеми только-что указанными свойствами.

Мы находим, что $w_1 = e^{i\alpha}$ и $w_2 = \frac{1}{q}$. Точная граница $K(\alpha, q)$ равна большему из растяжений двух модулярных функций, характеризуемых следующими выпускаемыми точками: 1, $e^{i\alpha}$, ∞ и 1, $\frac{1}{q}$, ∞.

5. Если обозначить через ν функцию, обратную модулярной функции, определенной в верхней полуплоскости и выпускающей точки $0, 1, \infty$, то σ просто выражается через известное выражение Каратеодори

$$\sigma = \frac{2I\nu\left(1 - \frac{1}{w}\right)}{\left|\nu'\left(1 - \frac{1}{w}\right)\right| \left|\frac{1}{w}\right|} \cdot \frac{1}{\left|1 - \frac{1}{w}\right|}.$$

$K_1(\alpha)$ и $K_2(\alpha, q)$ суть максимальные значения этого выражения в соответствующих областях. Если имеют место условия (1), то $K(\alpha, q)$ равно большему из двух чисел:

$$\frac{2I\nu(1 - e^{-i\alpha})}{|\nu'(1 - e^{-i\alpha})|\,|1 - e^{i\alpha}|}; \quad \frac{2I\nu(1 - q)}{|\nu'(1 - q)| \cdot q}; \quad \frac{1}{q - 1}.$$

Если точка $\frac{1}{q}$ лежит внутри линии „равного растяжения“, проходящей через точку $e^{i\alpha}$, то второе число будет больше. В противном случае большим будет первое число. *К этой последней константе приводит задача о покрытии сектора с вершиной в $w = 0$ и раствором $2\pi - \alpha$.*

Аналогичным образом можно доказать теорему: *значения любой функции семейства* $\{F(z)\}$ *покрывают или круг* $|w|<A(k)$ *или кольцо*

$$kA(k)<|w|<KA(k),$$

где $1<k<K\leqslant 1+d$, a $A(k)=\dfrac{\left|\nu'\left(1-\frac{1}{k}\right)\right|(k-1)}{2I\nu\left(1-\frac{1}{k}\right)k^2}$ (константа — точная).

Математический институт им. В. А. Стеклова.
Академии Наук СССР.
Москва.

Поступило
1 XII 1934.

MATHÉMATIQUES

SUR LES CONSTANTES ABSOLUES ANALOGUES À LA CONSTANTE DE M. A. BLOCH

Par A. BERMANT et M. LAVRENTJEV

(*Présenté par I. Vinogradow, de l'Académie, le 1.XII.1934*)

1. Considérons une famille de fonctions $\{F(z)\}$

$$w=F(z)=z+a_2z^2+\ldots$$

régulières à l'intérieur du cercle $|z|<1$.

D'après un théorème bien connu de M. A. Bloch (1) on a le résultat suivant.

Quelle que soit la fonction $F(z)$, le domaine riemannien correspondant au cercle-unité contient un cercle à un seul feuillet de rayon supérieur à une certaine constante absolue B.

Il résulte évidemment de ce théorème que les valeurs d'une fonction quelconque de la famille couvrent dans le plan w un cercle dont le rayon est au moins égal à un nombre L, $(B\leqslant L)$, ce nombre étant le même pour toutes les fonctions de la famille.

Le théorème sur l'existence de la constante L a été complété essentiellement dans des travaux ultérieurs (Montel, Privaloff, Valiron). Le résultat le plus important dans cet ordre d'idées est dû à M. Valiron (1926).

Designons par $C(R, \alpha)$, $R>0$, $0<\alpha<\pi$, chaque domaine qu'on obtient en enlevant du cercle $|w|<R$ un cercle vu de l'origine des coordonnées sous un angle α. Soit $R(\alpha, F)$ la plus grande valeur de R telle qu'il existe un domaine $C(R, \alpha)$ couvert par les valeurs de $F(z)$ pour $|z|<1$.

M. Valiron a démontré qu'il existe pour chaque α, $0<\alpha<\pi$, une borne inférieure positive $V(\alpha)$ de la fonctionnelle $R(\alpha, F)$ *:

Jusqu'a présent on ne connaît ni les valeurs exactes de B et L, ni l'expression de la fonction $V(\alpha)$.**

Dans le présent travail nous donnons un résultat analogue au théorème de M. Valiron. Pour la fonction absolue qu'on obtient dans ce cas nous pouvons trouver une expression analytique exacte.

2. Désignons par $C(R, \alpha, q)$ un domaine quelconque qu'on obtient en enlevant du cercle $|w|<R$ un quadrilatère curviligne $\varphi<\arg w<\varphi+\alpha$,

$$0\leqslant\varphi<2\pi,\ r<|w|\,qr,\ 0<r<1.$$

* Remarquons que $V(0)=0$.

** Pour certaines familles contenues dans la famille $\{F(z)\}$ (des fonctions univalentes, bornées, vérifiant la condition $F'(z)\neq 0$ pour $z\neq 0$), on a evalué exactement certains domaines couverts par les valeurs des fonctions de ces classes (Koebe, Landau, Carathéodory, Rogosinsky).

Théorème. *Quels que soient les nombres* α *et* q, $0<\alpha<\pi$, $q>0$, *et quelle que soit la fonction* $F(z)$ *de la famille* $\{F(z)\}$, *il existe toujours un domaine* $C(V, \alpha, q)$, $V>0$, *couvert par les valeurs de* $F(z)$ *pour* $|z|<1$, *où la fonction* V *ne dépend que de* α *et* q. *Dans le cas où* α *et* q *vérifient les conditions*

$$\left.\begin{aligned} &0<2\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant d, \qquad 0<\alpha<\pi \\ &1<q\leqslant\frac{1}{1-d}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où d, $0<d<1$, *est un nombre que nous définissons par la suite,* $V(\alpha, q)$ *est le plus petit des deux nombres*

$$\frac{|\nu'(1-e^{-i\alpha})|\,|1-e^{i\alpha}|}{2I\nu(1-e^{-i\alpha})}; \qquad \frac{|\nu'(1-q)|\cdot q(q-1)}{2I\nu(1-q)},$$

ν *étant la fonction inverse de la fonction modulaire.*

L'expression obtenue pour $V(\alpha, q)$ est définitive: quel que soit $R>V(\alpha, q)$, il existe un fonction de la famille $\{F(z)\}$ qui ne couvre aucun des domaines $C(R, \alpha, q)$. Nous obtenons l'existence et l'expression de $V(\alpha, q)$ en considérant le problème extrémal suivant:

Soit $\{f(z)\}$ *une famille de fonctions* $w=f(z)$ *régulières dans le cercle-unité* $|z|<1$ *et jouissant des propriétés suivantes: 1)* $f(0)=0$; *2)* $f(z)$ *ne couvre aucun domaine* $C(1, \alpha, q)$. *Il s'agit de trouver la borne supérieure pour les valeurs de la fonctionnelle* $|f'(0)|$, $f(z)\subset\{f(z)\}$. Désignons par $K(\alpha, q)$ la borne supérieure indiquée; il est évident que l'on a

$$V(\alpha, q)=\frac{1}{K(\alpha, q)}.$$

3. Chaque fonction $w=f(z)$ vérifiant les conditions du problème extrémal omet de prendre au moins les deux valeurs $w=re^{i\varphi}$ et $w'=r'e^{i\varphi}$,

$$\begin{gathered} \text{pour } r\leqslant r'<1, \\ |\varphi-\varphi'|>\alpha \quad \text{ou} \quad |\varphi-\varphi'|<\alpha, \quad \frac{r'}{r}>q. \end{gathered} \tag{2}$$

Chaque fonction $w=f(z)$ qui en plus de ces deux valeurs en omet encore d'autres ou bien qui a des points multiples peut être exclue de nos considérations en vertu du principe de Lindelöf (2). Ainsi, la borne supérieure $K(\alpha, q)$ doit être cherchée parmi les valeurs $f'(0)|$, les fonctions $f(z)$ etant des fonctions de type modulaire, définies dans $|z|<1$ et dont les valeurs exceptionnelles finies vérifient l'une des conditions (2).

On peut prendre $w'=1$; on obtient alors dans la famille indiquée des fonctions modulaires, celles qui ont les plus grandes valeurs de $|f'(0)|$. On peut d'ailleurs considérer la valeur $\sigma=|f'(0)|$ comme une fonction du second point exceptionnel w. Au moyen de quelques transformations la question se réduit à l 'examen de l'expression

$$\sigma=\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\cdot\left|\frac{w'}{u}\right|\cdot|\zeta|\cdot\ln\left|\frac{1}{\zeta}\right|,$$

où $u=u(\zeta)$, $u(0)=0$, est une fonction réalisant la représentation conforme d'un certain triangle curviligne sur le demi-plan supérieur. Il correspond à chaque valeur de ζ (ou de u) une valeur bien déterminée du second point exceptionnel w, donc une fonction bien déterminée de type modulaire.

4. Au point $\zeta=u=0$ correspond la valeur $w=1$, ce qui conduit au cas où les deux points exceptionnels coïncident, et d'ailleurs $\sigma=\infty$. Dans tous les autres points finis du demi-plan u la fonction σ est continue.

Il correspond au secteur $|w|\leqslant 1$, $\alpha\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\alpha$ un certain domaine fini dans le plan des u, où la fonction σ atteint son maximum $\sigma=K_1(\alpha)$ en un certain point u_1. Soit w_1 le point que correspond à u_1. Donc $K_1(\alpha)$ est la valeur de $|f_1'(0)|$, $f_1(z)$ étant une fonction modulaire définie dans $|z|<1$ et ne prenant pas les valeurs 1, w_1, ∞.

Il correspond de même au secteur $|w|\leqslant\frac{1}{q}$, $-\alpha\leqslant\varphi\leqslant\alpha$, un certain domaine fini dans le plan des u, où la fonction σ atteint son maximum $\sigma=K_2(\alpha, q)$ en un certain point u_2. Soit w_2 le point qui correspond à u_2. Donc, $K_2(\alpha, q)$ est la valeur de $|f_2'(0)|$, $f_2(z)$ étant une fonction modulaire ne prenant pas les valeurs 1, w_2, ∞.

Le plus grand des deux nombres $K_1(\alpha)$ et $K_2(\alpha, q)$ est la borne exacte $K(\alpha, q)$ cherchée. Si α et q vérifient les conditions (1), on peut indiquer le lieu exact des points w_1 et w_2. Les lignes où σ est constant, $\sigma=C\geqslant C_0$, situées dans un domaine borné sont, pour C_0 assez grand, des contours convexes fermés entourant le point $w=1$ et contenant les uns les autres.

Soit d un nombre tel que les lignes $\sigma=$ const. passant par un point arbitraire w, $|w-1|\leqslant d$ jouissent de toutes les propriétés indiquées.

Nous trouvons $w_1=e^{i\alpha}$ et $w_2=\frac{1}{q}$. $K(\alpha, q)$ est égale à la plus grande des deux valeurs $|f_1'(0)|$ et $|f_2'(0)|$ où les fonctions modulaires $f_1(z)$ et $f_2(z)$ sont caractérisées par leurs points exceptionnels 1, $e^{i\alpha}$, ∞ et 1, $\frac{1}{q}$, ∞.

5. Si l'on désigne par ν la fonction inverse de la fonction modulaire, définie dans le demi-plan supérieur et ne prenant pas les valeurs $0, 1, \infty$ on peut exprimer σ simplement au moyen de l'expression connue de Carathéodory

$$\sigma=\frac{2I\nu\left(1-\frac{1}{w}\right)}{\left|\nu'\left(1-\frac{1}{w}\right)\cdot\left|\frac{1}{w}\right|\right|}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{1}{w}\right|}\cdot$$

$K_1(\alpha)$ et $K_2(\alpha, q)$ sont les valeurs maxima de cette expression dans les domaines correspondants. Si les conditions (1) sont vérifiées, $K(\alpha, q)$ est le plus grand des deux nombres

$$\frac{2I\nu(1-e^{-i\alpha})}{\cdot\,|\nu'(1-e^{-i\alpha})|\cdot|1-e^{i\alpha}|}\;;\qquad\frac{2I\nu(1-q)}{|\nu'(1-q)|\cdot q}\cdot\frac{1}{q-1}\cdot\cdot$$

Si le point $\frac{1}{q}$ est à l'intérieur de la ligne $\sigma=$ const. passant par le point $e^{i\alpha}$, le second nombre surpasse le premier. On a l'inverse dans le cas contraire. *On arrive à cette dernière constante en cherchant à resoudre le problème du recouvrement d'un secteur ayant le sommet au point $w=0$ et l'angle égal à $2\pi-\alpha$.*

On démontre d'une manière analogue le théorème: *les valeurs d'une fonction quelconque de la famille $\{F(z)\}$ couvrent ou bien le cercle $|w|<A(k)$ ou bien l'anneau $kA(k)<|w|<KA(k)$*, où $1<k<K<1+d$, et

$$A(k)=\frac{\left|\nu'\left(1-\frac{1}{k}\right)\right|(k-1)}{2I\nu\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot k^2}\quad\text{(cette constante est exacte).}$$

Institut mathématique V. Stekloff.
Académie des Sciences de l'URSS.
Moscou.

Manuscrit reçu
le 1.XII.1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITTÉRATURE CITÉE

[1] Bloch. Ann. Fac. Sci. de Toulouse, 3-e série, t. XVIII, 1925. [2] Lindelöf. Acta Soc. Sci. Fenn., t. XXXV, 7, 1908.

МАТЕМАТИКА

В. А. КАЛАШНИКОВ и А. Г. КУРОШ

СВОБОДНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП С ОБЪЕДИНЕННЫМИ ПОДГРУППАМИ ЦЕНТРОВ

(*Представлено академиком Н. Н. Лузиным 20 I 1935*)

Теорема Шрейера о подгруппах свободных групп (1), играющая большую роль в теории групп, заданных определяющими соотношениями, уже обобщена на случай любых свободных произведений (2). Мы хотим указать здесь новое обобщение этой теоремы на еще более широкий класс групп.

Пусть группа G есть свободное произведение своих подгрупп H_α (α пробегает произвольное множество индексов) с объединенной подгруппой Z;

$$H_\alpha \frown H_{\alpha'} = Z \quad \text{при} \quad \alpha \neq \alpha';$$

мы предполагаем, далее, что Z содержится в центре всякой из групп H_α и поэтому является центром группы G. Всякий элемент g группы G, отличный от элементов из Z, имеет вид

$$g = h_1 h_2 \dots h_n, \quad h_i \in H_{\alpha_i}, \quad h_i \text{ не } \in Z, \quad \alpha_i \neq \alpha_{i+1};$$

равенство

$$h_1 h_2 \dots h_n = h_1' h_2' \dots h_k'$$

имеет место тогда и только тогда, если $k = n$, если h_i и h_i' принадлежат к одной и той же подгруппе H_{α_i}, если $h_i' h_i^{-1}$ содержится в Z $h_i' h_i^{-1} = z_i \in Z$ и если, наконец, $z_1 z_2 \dots z_n = 1$. Существование такой группы G при произвольных множествах H_α доказано Шрейером (1), где можно найти также более полное определение.

Если F есть произвольная подгруппа G, то имеет место следующая теорема: в F можно так выбрать множество подгрупп F_β и множество элементов c_γ, что

a) F будет минимальной подгруппой группы G, содержащей все F_β и c_γ,

b) всякая подгруппа F_β сопряжена с некоторой подгруппой одной из групп H_α,

c) все подгруппы F_β образуют свободное произведение с объединенной подгруппой Z'; $Z' = F \frown Z$, и поэтому Z' принадлежит к центру всякой из подгрупп F_β,

d) всякий элемент c_γ перестановочен со всеми элементами из Z',

e) нет никаких других соотношений, связывающих элементы c_γ между собою или с элементами из F_β; в частности, всякая циклическая группа $\{c_\gamma\}$ является бесконечной, и ее пересечение с Z' есть единичная группа.

Для доказательства этой теоремы можно или почти дословно повторить доказательство соответствующей теоремы из (2) или же перейти к фактор-группе G/Z и непосредственно опираться на результаты из (2).

Наша группе G будет при $Z = 1$ обычным свободным произведением, и наша теорема превращается в теорему о подгруппах, доказанную в (2).

Математический институт
Московского государственного университета.

Поступило
20 I 1935.

MATHEMATIK

FREIE PRODUKTE DER GRUPPEN MIT VEREINIGTEN UNTERGRUPPEN DER ZENTREN

Von V. KALAŠNIKOV (KALASCHNIKOW) und A. KUROŠ (KUROSCH)

(*Vorgelegt von N. Lusin, Mitglied der Akademie, d. 20. I. 1935*)

Der Satz von O. Schreier über Untergruppen freier Gruppen [1], der eine grosse Rolle in der Theorie der Gruppen mit definierenden Relationen spielt, ist schon für den Fall beliebiger freier Produkte verallgemeinert worden [2]. Wir wollen hier eine neue Verallgemeinerung dieses Satzes auf eine weitere Klasse von Gruppen zeigen.

Es sei eine Gruppe G das freie Produkt ihrer Untergruppen H_α (α durchlaufe eine beliebige Indexmenge) mit einer vereinigten Untergruppe Z.

$$H_\alpha \frown H_{\alpha'} = Z \quad \text{bei} \quad \alpha \neq \alpha';$$

wir nehmen dabei an, dass Z zum Zentrum jeder der Gruppen H_α gehört und daher das Zentrum von G bildet. Jedes nicht zu Z gehörende Element g der Gruppe G hat die Gestalt

$$g = h_1 h_2 \ldots h_n, \quad h_i \in H_{\alpha_i}, \quad h_i \text{ nicth} \in Z, \quad \alpha_i \neq \alpha_{i+1};$$

die Gleichheit

$$h_1 h_2 \ldots h_n = h_1' h_2' \ldots h_k'$$

wird dabei dann und nur dann gelten, wenn $k = n$ ist, h_i und h_i' zu derselben Untergruppe H_α gehören, $h_i' h_i^{-1} \in Z$ und $h_i' h_i^{-1} = z_i \in Z$ mit $z_1 z_2 \ldots z_n = 1$. Die Existenz einer solchen Gruppe G bei beliebigen Faktoren H_α ist von Schreier [1] bewiesen, wo man auch eine vollständigere Definition finden kann.

Ist F eine beliebige Untergruppe von G, so gilt folgender Untergruppensatz: man kann in F eine Menge von Untergruppen F_β und eine Menge von Elementen c_γ so wählen, dass

a) F die minimale Untergruppe von G ist, die alle F_β und c_γ enthält,

b) jede Untergruppe F_β mit einer Untergruppe von einer Gruppe H_α konjugiert ist,

c) alle Untergruppen F_β ein freies Produkt bilden mit der vereinigten Untergruppe Z; $Z' = F \frown Z$ und Z' gehört daher zum Zentrum jeder der Untergruppen F_β,

d) jedes Element c_γ ist mit allen Elementen von Z' vertauschbar,

e) es gibt keine anderen Relationen, welche die Elemente c_γ miteinander oder mit Elementen von F_β verbänden. Insbesondere ist jede zyklische Gruppe $\{c_\gamma\}$ unendlich und ihre Intersektion mit Z' ist der Einheitsgruppe gleich.

Um diesen Satz zu beweisen, kann man entweder fast wörtlich den Beweis des entsprechenden Satzes aus [2] wiederholen oder zur Faktorgruppe G/Z übergehen und sich direkt auf die Ergebnisse von [2] stützen.

Unsere Gruppe G wird bei der Voraussetzung $Z = 1$ ein gewöhnliches freies Produkt sein und unser Satz verwandelt sich dann in den in [2] bewiesenen Untergruppensatz.

Mathematisches Institut
der Universität Moskau.

Eingegangen
d. 20. I. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

1 O. Schreier. Abh. math. Seminar Hamburg. Univ., **5** (1927), 161—183.
2 A. Kurosch. Math. Annalen, **109** (1934), 647—660.

МАТЕМАТИКА

А. Р. МАРЧЕНКО

О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ КРУГА НА ОБЛАСТЬ, БЛИЗКУЮ К КРУГУ*

(*Представлено академиком С. А. Чаплыгиным 11 XII 1934*).

В этой заметке мы имеем в виду дать ряд оценок для однолистных функций, совершающих конформное отображение круга на область близкую к кругу.

Первый результат, относящийся к такого рода оценкам, был получен Бибербахом ([1]).

Бибербах доказал такую теорему:

Пусть B односвязная, однолистная область в плоскости $|w|$, ограниченная замкнутой спрямляемой кривой Жордана Г длины L. Кроме того 1) $|L-2\pi|<\varepsilon\cdot 2\pi$, 2) область B содержит точку $w=0$, 3) Контур Г принадлежит круговому кольцу, образованному двумя концентрическими кругами с центром в нулевой точке и радиусов $1+\varepsilon$ и $1-\varepsilon$.

Пусть $f(z)=w$ аналитическая функция, совершающая конформное отображение круга $|z|<1$ на область B, причем так, что

$$f(0)=0 \quad \text{и} \quad f'(0)>0.$$

При этих условиях в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ имеем:

$$|f(z)-z|<4\pi\sqrt{2\varepsilon}.$$

Метод, использованный Бибербахом при доказательстве этой теоремы, основан на известной теореме площадей.

Методом принципиально отличным от метода Бибербаха нам удалось установить предложения, существенно уточняющие и обобщающие теорему Бибербаха. Бибербах утверждает, что в полученной им оценке

$$|f(z)-z|<4\pi\sqrt{2\varepsilon}$$

порядок правой части относительно ε снижен быть не может. Однако, из нашей теоремы следует, что порядок может быть снижен до $\varepsilon|\ln\varepsilon|$. **

Теорема 1. Пусть B конечная односвязная однолистная область плоскости (w), ограниченная замкнутой кривой Жордана Г, обладающей следующими свойствами: 1) область B содержит точку $w=0$, 2) контур Г принадлежит круговому кольцу, образованному двумя концентрическими кругами с центром в нулевой точке и радиусов $1+\varepsilon$ и $1-\varepsilon$, 3) если α и β две произвольные точки контура Г, такие что расстояние между ними $\leqslant 2\varepsilon$, то диаметр кривой $(\alpha\beta)\leqslant\eta$ $(\eta>\varepsilon)$.

При этих условиях, если $f(z)$, $f(0)=0, f'(0)>0$, аналитическая функция, которая конформно отображает круг $|z|<1$ на область B, при $|z|\leqslant 1$ имеем:

$$|f(z)-z|<K\varepsilon|\ln\varepsilon|+K_1\eta,$$

где K и K_1 абсолютные константы.

* Метод для доказательства основной теоремы был указан М. А. Лаврентьевым.

** Свое утверждение Бибербах основывает на конкретном примере, в котором однако допускает ошибку.

Если $\varphi(w)=z$ функция обратная для $f(z)$, то внутри B и на контуре Γ имеем: $|\varphi(w)-w|<K'\varepsilon|\ln\varepsilon|+K_1'\eta$, где K' и K_1' абсолютные константы.

Полученная оценка окончательная: при сколь угодно малом ε и η существует область B, удовлетворяющая условиям нашей теоремы и такая, что при некоторых значениях z имеем: $|f(z)-z|>M\varepsilon|\ln\varepsilon|+M_1\eta$, $|\varphi(w)-w|>M'\varepsilon|\ln\varepsilon|+M_1'\eta$, где M, M_1, M' и M_1' абсолютные константы. Заметим, что область B, удовлетворяющая условиям теоремы Бибербаха, будет удовлетворять условиям теоремы 1, если считать $\eta=k\varepsilon$, где k — константа. При $\eta=k\varepsilon$ будем иметь:

$$|f(z)-z|<K\varepsilon|\ln\varepsilon|+K_1k\varepsilon$$
$$|\varphi(w)-w|<K'\varepsilon|\ln\varepsilon|+K_1'k\varepsilon.$$

Укажем идею доказательства. Так как $f(z)$ конформно отображает круг $|z|<1$ на область, ограниченную кривой Жордана, то $f(z)$ непрерывна в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$, и максимум значения $|f(z)-z|$ достигается при $|z|=1$.

Следовательно, чтобы оценить $|f(z)-z|$ в замкнутом круге, достаточно оценить $|f(z)-z|$ при $|z|=1$. Так как при $|z|=1$ по условию имеем $||f|(z)|-|z||\leqslant 2\varepsilon$, то для доказательства теоремы достаточно получить оценку для $|\arg f(z)-\arg z|$. Замечая, что гармоническая функция $\arg\frac{f|z|}{z}$ при $z=0$ равна нулю, нетрудно видеть, что существует z, $|z|=1$, при котором $\arg f(z)=\arg z$.

Этим самым наша задача приводится к следующему вопросу —

Пусть область B удовлетворяет условиям нашей теоремы и пусть $w_1=\rho_1e^{i\psi_1}$, $w_2=\rho_2e^{i\psi_2}(\psi_2<\psi_1)$, две точки границы B, соответствующие при отображении $w=f(z)$ точкам $e^{i\varphi_1}$ и $e^{i\varphi_2}$. При этих условиях, считая ε и η малым, требуется оценить сверху и снизу $\Delta=(\varphi_2-\varphi_1)-(\psi_2-\psi_1)$. Для оценки Δ сверху построим односвязную область B_1, граница которой состоит 1) из дуги $(\psi_1-\eta_1\psi_2+\eta)$ окружности $|w|=1-\varepsilon$, 2) из дуги $(\psi_2+\eta, 2\pi+\psi_1-\eta)$ окружности $|w|=1+\varepsilon$ и 3) из прямолинейных отрезков соединяющих концы построенных дуг.

Отобразим конформно $w=F(z)$, $F(0)=0$ и $F'(0)>0$, круг $|z|<1$ на область B_1 и обозначим через δ длину дуги, которая при этом отображении перейдет в дугу $(\psi_2+\eta,\ 2\pi+\psi_1-\eta)$. Применяя принцип Монтеля ([2]), нетрудно убедиться, что $\Delta<2\pi-(\psi_2-\psi_1)-2\eta-\delta$.

Рассматривая функцию $F(z)$, несложным подсчетом можно убедиться в существовании абсолютных констант K_2 и K_1, таких, что

$$\delta>2\pi-(\psi_2-\psi_1)-2\eta+K_2\varepsilon|\ln\varepsilon|+K_3\eta.$$

Отсюда

$$\Delta<K_2\varepsilon|\ln\varepsilon|+K_3\eta. \qquad (1)$$

Вполне аналогично можно показать, что $\Delta>K_2'\varepsilon|\ln\varepsilon|+K_3'\eta$.

Неравенство (1) можно уточнить, если предположить, что граница Γ области B находится в „ε-близости“ первого порядка окружности $|w|=1$.

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 дополнительно допустить, что границу Γ можно задать уравнением $\rho(\psi)$, где $\rho(\psi)$ есть однозначная функция ψ, удовлетворяющая условию Липшица

$$|\rho(\psi+\Delta\psi)|-\rho(\psi)|<M\varepsilon|\Delta+1 \qquad M=\text{const.}$$

то

$$|f(z)-z|<K\cdot\varepsilon,$$

где K зависит только от M.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академия Наук СССР. Москва.

Поступило
11 XII 1934.

SUR LA REPRÉSENTATION CONFORME*

Par A. MARČENKO (MARTSCHENKO)

(*Présenté par S. Čaplygin, de l'Académie, le 11. XII. 1934*)

Le but de cette Note est d'indiquer quelques généralisations d'un théorème de M. Bieberbach.

M. Bieberbach [1] a démontré le théorème suivant:

Supposons que B est un domaine simplement connexe du plan (w), limité par une courbe fermée rectifiable de Jordan Γ de longueur L. Soit d'ailleurs: 1) $|L-2\pi|<2\pi\cdot\varepsilon$, 2) le domaine B contienne le point $w=0$, 3) le contour Γ appartienne à l'anneau circulaire formé par deux cercles concentriques, dont le centre se trouve au point $z=0$ et dont les rayons sont égaux à $1+\varepsilon$ et $1-\varepsilon$.

Soit $w=f(z)$, la fonction analytique qui réalise la représentation conforme du cercle $|z|<1$ sur le domaine B de sorte que l'on ait: $f(0)=0, f'(0)>0$. Dans ces conditions nous avons dans le cercle fermé

$$|f(z)-z|<4\pi\sqrt{2\varepsilon}.$$

La méthode de M. Bieberbach pour démontrer ce théorème est fondée sur le théorème bien connu des aires.

Nous avons réussi par une méthode en principe toute différente de celle de l'auter, d'établir des propositions qui précisent et généralisent le théorème de Bieberbach. Bieberbach affirme que dans l'inégalité qu'il a obtenue, l'ordre de grandeur du second membre par rapport à ε ne peut pas être abaissé. Cependant, il suit de notre théorème que l'ordre peut être abaisser jusqu'à $\varepsilon|\ln\varepsilon|$**.

Théorème 1. Admettons que B soit un domaine simplement connexe dans le plan (w), limité par une courbe fermée de Jordan, qui possède les propriétés suivantes: 1) le domaine B contient le point $w=0$, 2) le contour Γ appartient à l'anneau circulaire formé par deux cercles concentriques, dont le centre est au point $z=0$ et dont les rayons sont égaux á $1+\varepsilon$ et $1-\varepsilon$, 3) si α et β sont deux points du contour Γ tels que la distance en soit $\leqslant 2\varepsilon$, le diamètre de l'arc est moindre que η.

Dans ces conditions, si $f(z)=w$ est une fonction analytique qui réalise la représentation conforme du cercle $|z|<1$ sur le domaine B de manière que $f(0)=0$, $f'(0)>0$, nous avons

$$|f(z)-z|<K\varepsilon|\ln\varepsilon|+K_1\eta,$$

où K et K_1 sont des constantes absolues.

Si $\varphi(w)=z$ est une fonction inverse de $f(z)$, nous avons dans le domaine B

$$|\varphi(w)-w|<K'\varepsilon|\ln\varepsilon|+K_1'\eta,$$

où K' et K_1' sont des constantes absolues.

L'ordre des seconds membres dans les inégalités obtenues ne peut pas être abaissé.

* La méthode pour la démonstration du théorème fondamental a été indiquée par. M. A. Lavrentjev.

** L'affirmation de M. Bieberbach est basée sur un exemp'e concret dans lequel, cependant, il commet une erreur.

Si un domaine B satisfait aux conditions du théorème cité de M. Bieberbach et si nous posons $\eta = k\varepsilon$, alors if satisfait aux conditions du thèoréme 1.

$$\text{Si } \eta = k\cdot\varepsilon \text{ nous avons } |f(z)-z| < K\cdot\varepsilon|\ln\varepsilon| + K_1\eta.$$

Indiquons l'idée de la démonstration: Puisque $f(z)$ réalise la représentation du cercle $|z|<1$ sur le domaine B, limité par une courbe de Jordan, $f|z|$ est continue dans le cercle fermé $|z|\leqslant 1$ et le maximum de $|f(z)-z|$ est atteint pour $|z|=1$.

Il en résulte que pour évaluer $|f(z)-z|$ dans le cercle fermé il suffit d'évaluer $|f(z)-z|$ pour $|z|=1$. Comme d'après les conditions du théorème pour $|z|=1$ nous avons $||f(z)|-|z||\leqslant 2\varepsilon$, il suffit pour la démonstration du théorème d'évaluer l'expression $|\arg f(z)-\arg z|$. En remarquant que la fonction harmonique $\arg\frac{f(z)}{z}$ est égale à zéro, pour $z=0$, il est facile de voir qu'il existe une valeur de z pour laquelle $\arg f(z)=\arg z$.

De cette façon notre théorème se réduit à la question suivante:

Admettons que le domaine B satisfait aux conditions de notre théorème et que $w_1=\rho_1 e^{i\psi_1}$, $w_2=\rho_2 e^{i\psi_2}$ $(\psi_2>\psi_1)$ sont deux points de Γ, qui correspondent dans la représentation $w=f(z)$ aux points $e^{i\varphi_1}$ et $e^{i\varphi_2}$. Dans ces conditions, en supposant ε et η petits, il faut trouver les bornes supérieures et inférieures de $\Delta=(\varphi_2-\varphi_1)-(\psi_2-\psi_1)$. Pour trouver la borne supérieure nous construisons un domaine simplement connexe, dont la frontière se compose: 1) de l'arc $(\psi_1-\eta,\ \psi_2+\eta)$ de la circonférence $|w|=1-\varepsilon$, 2) de l'arc $(\psi_2+\eta,\ 2\pi+\psi_1-\eta)$ de la circonférence $|w|=1+\varepsilon$ et 3) des segments rectilignes qui joignent les extrémités des arcs construits.

Faisons la représentation conforme $w=F(z)$, $F(0)=0$, $F'(0)>0$ du cercle $|z|<1$ sur le domaine B_1. Désignons par δ la longueur de l'arc qui correspond dans cette transformation à l'arc $(\psi_2+\eta,\ 2\pi+\psi_1-\eta)$ de la circonférence. En appliquant le principe de Montel[2] il est facile de démontrer que $\Delta<2\pi-(\psi_2-\psi_1)-2\eta-\delta$.

En examinant la fonction F(z), on peut, par un calcul élémentaire, démontrer l'existence de constantes absolues K_2 et K_3 telles que:

$$\delta > 2\pi-(\psi_2-\psi_1)-2\eta+K_2\varepsilon|\ln\varepsilon|+K_3\eta.$$

Donc

$$\Delta < K_2\varepsilon|\ln\varepsilon|+K_3\eta \qquad (1)$$

D'une manière analogue on peut démontrer que

$$\Delta > K_2'\varepsilon|\ln\varepsilon|+K_3'\eta.$$

L'inégalité (1) peut être précisée, si l'on suppose que la frontière Γ du domaine B se trouve dans une „ε-proximité“ de premier ordre de la circonférence $|w|=1$

Théorème 2. Si dans les conditions du théorème 1 on admet complémentairement que la frontière Γ peut être définie par l'équation $\rho(\psi)$, où $\rho(\psi)$ est une fonction univalente ψ satisfaisant aux conditions de Lipschitz

$$|\rho(\psi+\Delta\psi)-\rho(\psi)|<M\cdot\varepsilon|\Delta\psi|,$$

nous aurons $|f(z)-z|<K\cdot\varepsilon$, où K ne dépend que de M.

Institut mathématique V. Stekloff.
Académie des Science de l'URSS.
Moscou.

Manuscrit reçu
le 11. XII. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITTÉRATURE CITÉE

[1] Bieberbach. Sitz. Ber. Preuss. Akad. Wiss., XIV, 1924. [2] M. P. Montel. Journ. de Math., 7-e série, 3, 1917.

АСТРОФИЗИКА

В. Г. ФЕСЕНКОВ, член-корреспондент Академии Наук СССР

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФЕКТА РАДИАЦИИ В СОЛНЕЧНЫХ ПЯТНАХ

Для характеристики солнечной деятельности еще в настоящее время служит совершенно условный признак — так наз. относительные числа Вольфа, представляющие собою комбинацию количества отдельных пятен и групп, имеющихся в данный момент на диске солнца. С той же целью определяется площадь пятен, которая, являясь чисто геометрическим элементом, может характеризовать физическую природу процессов на солнце лишь косвенным образом. Несравненно рациональнее характеризовать данное пятно, а равным образом всю наблюдаемую в данный момент совокупность пятен, по испускаемой ими радиации или, точнее выражаясь, по обусловливаемому ими дефекту радиации по сравнению с окружающей солнечной поверхностью. Для этой цели удобнее и нагляднее ввести „эффективную" площадь пятна, понимая под нею ту площадь, которую нужно приписать данному пятну при том же дефекте радиации, если бы оно было совершенно черным. Эта эффективная площадь выражается в миллионных долях солнечной полусферы и показывает, какая доля выпадает вследствие наличия пятен из всей солнечной поверхности, наблюдаемой с земли. Число, характеризующее состояние поверхности солнца на данный день, есть сумма эффективных площадей всех наличных пятен.

Для указанной цели летом 1934 г. мною в мастерской Кучинской астрофизической обсерватории построен прибор следующего устройства. На экране, соединенном с окулярным концом рефрактора апохромата типа B, получаем изображение солнца размером в 18 см в диаметре при помощи окуляра со слабым увеличением. Если из этого изображения вырезать при помощи диафрагмы небольшую площадь диаметром в несколько миллиметров, то все лучи в пределах этой площади будут почти в точности параллельны между собой. Непосредственно за диафрагмой помещаем небольшой ахроматический объектив с фокусным расстоянием в 3 см. Все лучи, прошедшие через диафрагму, собираем при помощи этого объектива в один фокус, в котором помещен спай чувствительного термоэлемента. В нашем приборе мы имеем в плоскости изображения солнца четыре диафрагмы, именно в 1, 2, 3 и 4 мм в диаметре, сделанные на одной пластинке, которую можно перемещать перед объективом прибора. Чувствительность термоэлемента Цейсса, применяемого нами, наибольшая в центральной точке зачерненного приемного диска, но быстро падает по направлению к его краям. Тем не менее, благодаря примененной оптической системе, каждый элемент изображения внутри диафрагмы производит на термоэлемент одинаковое действие. Это доказывается тем, что отклонение стрелки гальванометра в пределах ошибок измерений пропорционально площади примененной диафрагмы, конечно при условии освещения ее равномерным участком фотосферы (см. табл. 1)

Таблица 1 — Table 1

Относительная площадь диафрагм ..	1.00	3.56	8.05	14.85
Относительное отклонение гальванометра	0.97	3.68	8.39	14,85

Для удобства наблюдений непосредственно перед отверстием диафрагмы помещен белый матовый диск с крестом штрихов, пересечение которых совпадает с центром диафрагмы. Этот диск, служащий для

наведения на него пятна, насажен на рычажок, который может откидываться в сторону при помощи небольшого электромагнита. Наводим пятно на пересечние штрихов упомянутого диска и отсчитываем при закрытой диафрагме показание гальванометра. Затем, надавливая на ключ электромагнита, открываем отверстие диафрагмы и заставляем все количество радиации, прошедшее через нее, действовать на термоэлемент. Подобная процедура повторяется много раз для пятна и участков солнечной фотосферы, симметрично расположенных по обе стороны от пятна. Дефект радиации пятна вычисляется, согласно данному выше определению, по формуле

$$D = \frac{s_2 - s_1}{s_2} \cdot \frac{10^6 r_i^2}{2\pi R^2},$$

где s_2, s_1 отклонения стрелки гальванометра от фотосферы и пятна, R — радиус солнечного изображения, r_i — радиус дифрагмы.

Наблюдемое понижение солнечной радиации, имеющее место вследствие наличия данного пятна, выраженное для удобства в миллионных долях излучения солнца, есть

$$\frac{s_2 - s_1}{s_2} \cdot \frac{r_i^2}{2\pi R^2} \cdot \frac{f(\rho_1) \cdot 10^6}{\int_0^1 f(\rho)\, \rho\, d\rho},$$

где $f(\rho)$ есть распределение энергии на диске солнца в функции расстояния от центра ρ ($\rho = 0$ в центре диска, 1 — на краю, ρ_1 — для данного пятна). Заметим, что наблюдения с подобным прибором производятся легко и быстро, но требуют безупречного хода часового механизма. В Кучинской астрофизической обсерватории это условие удовлетворяется при помощи секундных контролей, которые сконструированы мною совместно с механиком обсерватории Яковлевым и изготовлены в мастерской обсерватории. Маятник, помещенный в лаборатории обсерватории, каждую секунду исправляет ход часовых механизмов, движущих рефракторы на разных башнях.

В нижеследующей табл. 2 дается номер пятна по пулковскому обозначению, дата, стандартное московское время, расстояние объекта от центра солнечного диска и наблюдаемый дефект D радиации; кроме того в последнем столбце дается дефект D_c радиации, редуцированный на центр диска путем умножения на секанс угла, который луч зрения составляет с соответствующим радиусом солнца. Приводимые здесь числовые данные еще слишком недостаточны, чтобы на основании их можно было бы сделать какие-либо определенные выводы.

Замечу в заключение, что дефект радиации, приводимый в табл. 2, не редуцирован за селективные свойства применяемой оптики. Пропускная способность p объектива и окуляра рефрактора, с которым велись наблюдения, очень мала для ультрафиолетового конца спектра. Имеем в произвольных единицах:

Таблица 2 — Table 2

λ	3617	3690	3770	3860	3950	4049	4154	4408	4716
p	0.12	0.32	0.44	0.53	0.63	0.78	0.98	1.113	1.10

Вследствие более низкой температуры пятна по сравнению с фотосферой действительный дефект радиации должен быть несколько больше указанного выше.

Астрофизическая обсерватория
Московского государственного
университета. Кучино.

Поступило
20 XII 1934.

DÉTERMINATION DE LA RADIATION INTÉGRALE DES TACHES SOLAIRES RELATIVEMENT À LA PHOTOSPHÈRE

Par V. FESENKOV (FESSENKOFF)
membre correspondant de l'Académie

L'activité du Soleil comme elle se manifeste dans les taches peut être caractérisée de façon assez naturelle par les mesures directes de la radiation intégrale des taches par rapport à la photosphère environnante. On déduit de ces mesures l'aire „effective" qui donne directement la portion de la surface du Soleil étant effectivement exclue en raison du manque de radiation dans les taches considérées.

Dans ce but j'ai construit dans l'atelier de l'Observatoire Astrophysique de Koutchino l'appareil suivant.

Un petit objectif à la longueur du foyer de 3 cm est placé dans le plan où l'image du Soleil est formée à l'aide d'un système optique (un réfracteur de Zeiss muni d'un oculaire × 40).

Tous les rayons contenus dans une petite portion de cette image isolée par un diaphragme convenable (1, 2, 3 ou 4 mm diamètre) sont réunis sur la partie sensible d'un thermocouple de Zeiss. On observe la différence des amplitudes du galvanomètre correspondantes aux radiations de la tache et de la photosphère au voisinage immédiat de celle-ci.

L'aire effective exprimée en 10^6-mes parties de l'hemisphère du Soleil est donnée par la formule

$$D = \frac{s_2 - s_1}{s_2} \cdot \frac{10^6 \cdot r_i^2}{2\pi R^2},$$

où s_2, s_1 sont les déviations du galvanomètre pour la photosphère et la photosphère et la tache, r_i — le rayon du diaphragme, R — le rayon de l'image du Soleil. La diminution de la radiation totale du Soleil dans la direction de l'observateur due à la présence de la tache est

$$\frac{s_2 - s_1}{s_2} \frac{r_i^2}{2\pi R^2} \frac{f(\rho_1) \cdot 10^6}{\int_0^1 f(\rho) \rho d\rho},$$

où $f(\rho)$ exprime la distribution de l'énergie sur le disque solaire ($\rho = 0$ au centre, à 1 au bord et à ρ_1 pour la tache). Table 2 (voir p. 292) contient le numéro courant de la tache d'après l'Observatoire de Poulkovo, la date, le temps civil de Moscou, la distance ρ_1 de la tache et l'aire effective apparente D. La dernière colonne donne l'aire effective réduite au centre. Les observations sont encore insuffisantes en nombre, mais il paraît que la radiation de la tache varie en fonction de ρ_1, à peu près suivant la même loi que la radiation de la photosphère.

Observatoire astrophysique de
l'Université de Moscou
Koutchino.

Manuscrit reçu
le 20. XII. 1934.

А. ТИХОНОВ

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

(*Представлено академиком Н. Н. Лузиным 20 I 1935*)

Мы предлагаем здесь исследование вопроса о единственности решений для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

для бесконечной прямой. Решения этого уравнения не определяются единственным образом по заданному начальному значению $\varphi(x)$ (§ 1). Далее (§§ 2 — 5) мы исследуем интеграл Пуассона

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi$$

и выясним когда заданное решение уравнения (1) представимо в таком виде. Кроме того мы установим некоторые условия единственности решения (1) для бесконечной прямой.

В §§ 6 — 7 мы занимаемся теми же задачами для полупрямой. В § 8 мы ставим новую „обратную“ задачу теплопроводности, имеющую целью определить решение $u(x, t)$ для $x \geqslant 0$ $t < 0$ по заданному значению $u(x, 0) = \varphi(x)$. При этом никаких граничных условий не требуется — они определяются сами.

§ 1. Рассмотрим функцию

$$u(x,t) = F(t) + x \cdot F_1(t) + \frac{x^2}{2} \cdot F'(t) + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(n)}(t) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} F_1^{(n)}(t) + \ldots$$

Очевидно, что если этот ряд равномерно сходится, то он представляет решение уравнения теплопроводности. Если при этом функции $F(t)$ и $F_1(t)$ обладают тем свойством, что они со всеми своими производными обращаются в 0 при $t = 0$, то полученное решение будет отлично от тождественного нуля, но $u(x, 0) = 0$ при $t = 0$.

Выбор функций $F(t)$ и $F_1(t)$, удовлетворяющих поставленным условиям, нетрудно осуществить. Этот пример показывает, что начальное условие не определяет единственного решения уравнения (1).

§ 2. Пусть мы имеем решение $u(x, t)$ уравнения теплопроводности, определенное для всех значений x и $t > 0$.

Отсюда можно заключить, что $u(x, t)$ целая функция по x и что она имеет все производные по t. Таким образом, она представима в виде

$$u(x,t) = F(t) + x \cdot F_1(t) + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} F^{(n)}(t) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} F_1^{(n)}(t) + \ldots,$$

причем

$$F(t) = u(0, t), \qquad F_1(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t).$$

Отсюда как следствие получается, что двух различных решений уравнения теплопроводности $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, для которых

$$u_1(0, t) = u_2(0, t), \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t),$$

быть не может. Эти условия единственности аналогичны условию Коши-Ковалевской.

§ 3. Если задано непрерывное начальное значение $\varphi(x)$, то решение уравнения теплопроводности, принимающие это начальное значение, обычно записывают в виде интеграла Пуассона

$$P(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \varphi(\xi)\, d\xi$$

Но этот интеграл может представлять решение нашей задачи только тогда, когда этот интеграл сходится. Кроме того, обычные доказательства предполагают возможность дифференцировать это выражение под знаком интеграла, для чего предполагают равномерную сходимость интегралов, получающихся от двукратного дифференцирования под знаком интеграла. Мы доказываем следующую теорему.

Если интеграл $P(x, t)$ сходится для некоторого значения x_0, t_0, то он сходится для любых значений x, $t\,(0 \leqslant t < t_0)$ и представляет в этой области решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее поставленному начальному условию.

§ 4. Пусть дано некоторое решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$, определенное для $-\infty < x < +\infty$ и $0 \leqslant t$; при каких условиях $u(x, t)$ представимо в виде Пуассона?

Установим для этого два различных типа условий.

Первое условие, необходимое и достаточное, получается при изучении аналитической структуры функций

$$u(0, t) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$$

(эти функции, как мы видели в § 2, вполне определяют решения). Второе условие (достаточное) получается при помощи ограничения на характер роста $u(x, t)$ при $x \to \infty$. Первое условие можно формулировать так:

Для того чтобы решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$ было представимо в виде интеграла Пуассона, необходимо и достаточно, чтобы

$$u\left(0, \frac{1}{t}\right)\sqrt{t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) \cdot t^{3/2}$$

были представимы при помощи преобразования Лапласа*.

§ 5. Обозначим через

$$f(x) = \max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} u(x, t).$$

Если существует такое C, что

$$f(x) \cdot e^{Cx^2} \underset{|x| \to \infty}{\longrightarrow} \infty, \tag{I}$$

то двух разных решений уравнения теплопроводности, удовлетворяющих условию (I) и принимающих одинаковые начальные условия, быть не

* Что касается условий для того, чтобы $f(t)$ была представима при помощи преобразования Лапласа

$$f(t) = \int_0^{\infty} e^{-t\alpha} g(\alpha)\, d\alpha,$$

см. статью Виддера (1).

может. Причем $u(x, t)$ в этом случае представимо в виде интеграла Пуассона. Заметим, что среди функций, построенных в § 1 и не удовлетворяющих условию единственности, легко найти функции, для которых

$$f(x) < e^{x^{2+\varepsilon}}$$

при произвольно малом ε.

§ 6. Рассмотрим задачу: найти решение $u\ (x, t)$ уравнения теплопроводности по заданным

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x \geqslant 0); \quad u(0, t) = \mu(t) \quad (t \geqslant 0)$$

(первая краевая задача для бесконечной полупрямой).

Эта задача имеет не единственное решение, как в том легко убедиться рассуждениями, аналогичными § 1.

Если наложить условие (см. § 5)

$$f(x) \cdot e^{0x^2} \underset{x\to\infty}{\to} 0,$$

то получается единственное решение, представимое в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \right\} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

§ 7. Обратимся к задаче Фурье:

Определить решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$ $(x \geqslant 0,$ $t > -\infty)$, удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = \mu(t).$$

Очевидно, что эта задача не определена, так как

$$u(x, t) = x \cdot F_1(t) + \frac{x^3}{3!} F_1'(t) + \ldots$$

удовлетворяет условию задачи при $\mu(t) = 0$, если только этот ряд сходится. Если $F_1(t)$ многочлен степени n, то

для $n = 0$ $\quad u_0(x, t) = kx,$

для $n = 1$ $\quad u_1(x, t) = k_1 xt + \left(kx + k_1 \frac{x^3}{3!}\right),$

. . . . . .

Мы доказываем, что при условии, что

$$\left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right| < M,$$

то $\quad \overline{u}(x, t) - \overline{\overline{u}}(x, t)$

двух функций $\overline{u}(x, t)$ и $\overline{\overline{u}}(x, t)$, удовлетворяющих условиям задачи Фурье, является многочленом $u_n(x, t)$, удовлетворяющим уравнению теплопроводности. Если $n = 0$, то

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau.$$

§ 8. Рассмотрим задачу: определить решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$ для всех значений $x \geqslant 0$ и $t < 0$, если задана

$$u(x, 0) = \varphi(x).$$

Эта задача, так же как и предшествующие, не определена без дополнительных условий, так как

$$u(x, t) = F(t) + x F_1(t) + \frac{x^2}{2!} F'(t) + \frac{x^3}{3!} F_1'(t) + \ldots \qquad (t = 0)$$

является решением поставленной задачи при $\varphi(x)=0$, если только ряд сходимости и $F(t)$ и $F_1(t)$ вместе со всеми производными обращается в нуль при $t=0$ [такие $F(t)$ и $F_1(t)$ существуют, § 1].

Мы доказываем:

Если $u(x, t)$ и $u_1(x, t)$ удовлетворяют поставленной задаче и

$$\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial x^n} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^n u}{\partial x^n}$$

ограничены (равномерно), то

$$u(x, t) \equiv u_1(x, t).$$

Если $n=0$, т. е. функция $u(x, t)=u_1(x, t)-u_2(x, t)$ ограничена, то

$$0=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{(-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4(-\tau)}}\mu(\tau)\,d\tau,$$

где $\mu(\tau)=u(0, t)$ (ср. § 7). При помощи простых преобразований получаем:

$$0=\int_0^\infty e^{-\alpha z}\overline{\mu}(z)\,dz,$$

где

$$\alpha=x^2; \quad z=-\frac{1}{4\tau}$$

$$\overline{\mu}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\mu\left(-\frac{1}{4z}\right)}{\sqrt{z}}.$$

В силу теоремы Лерха [2] $\overline{\mu}(z)=0$, а следовательно и $\mu(\tau)=0$.

Общий случай для любого n сводится к предшествующему простым дифференцированием.

Поступило
20 I 1935.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

THÉORÈMES D'UNICITÉ POUR L'ÉQUATION DE LA CHALEUR

Par A. TICHONOV (TYCHONOFF)

(*Présenté par N. Lusin, de l'Académie, le 20. I. 1935*)

Nous nous proposons d'étudier la question de l'unicité d'une solution de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{1}$$

dans l'intervalle infini des x.

Une solution de cette équation n'est pas définie d'une manière univoque par la valeur initiale $\varphi(x)$ (§ 1). Nous examinerons dans la suite (§§ 2—5) l'intégrale de Poisson

$$P(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)\,d\xi$$

et nous allons déterminer les conditions pour que la solution donnée de l'équation (1) se présente dans sette forme. En outre, nous allons établir des conditions d'unicité de la solution de l'équation (1) pour une droite infinie.

Dans les §§ 6—7 nous nous occupons des mêmes problèmes pour une demi-droite. Au § 8 nous posons un nouveau problème de conduction de la chaleur, ayant pour but de déterminer la solution $u(x, t)$ pour $x\geqslant 0$, $t<0$ d'après la valeur donnée de $u(x, 0)=\varphi(x)$. D'ailleurs, on n'exige aucune condition pour $x=0$ qui se détermine par elle-même.

§ 1. Considérons une fonction

$$u(x,t)=F(t)+x\cdot F_1(t)+\frac{x^2}{2!}F'(t)+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(n)}(t)+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}F_1^{(n)}(t)+\ldots$$

Évidemment, si cette série converge uniformément, elle présente une solution de l'équation de la chaleur; si de plus les fonctions $F(t)$ et $F_1(t)$ possèdent la propriété de s'annuler, ainsi que leurs dérivées, pour $t=0$, alors la solution obtenue n'est pas identiquement nulle, quoique pour $t=0$ on a $u(x, 0)=0$. Il est facile de réaliser le choix de fonctions satisfaisant aux conditions données. Cet exemple prouve que la condition initiale ne détermine pas en général la solution unique.

§ 2. Soit $u(x, t)$ une solution de l'équation de la chaleur définie pour toutes les valeurs de x et pour $t\geqslant 0$. Alors il en résulte que $u(x, t)$ est une fonction entière de x et elle admet toutes les dérivées par rapport à t. Ainsi elle peut être représentée sous la forme

$$u(x,t)=F(t)+xF_1(t)+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}F^{(n)}(t)+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}F_1^{(n)}(t)+\ldots,$$

où

$$F(t)=u(0,t),\quad F_1(t)=\frac{\partial u}{\partial x}(0,t).$$

Il en résulte que deux solutions différentes $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ de l'équation de la chaleur, pour lesquelles

$$u_1(0,t)=u_2(0,t),\quad \frac{\partial u_1}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u_2}{\partial x}(0,t)$$

ne peuvent exister.

Ces conditions d'unicité sont analogues aux conditions de Cauchy-Kowalevsky.

§ 3. Étant donnée une fonction continue $\varphi(x)$, on exprime la solution de l'équation qui se réduit à $\varphi(x)$ pour $t=0$, par l'intégrale de Poisson

$$P(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Mais cette intégrale peut représenter une solution de notre problème dans le seul cas où cette intégrale converge. De plus, la démonstration ordinaire suppose la possibilité de la dérivation de cette expression sous le signe, ce qui exige la convergence uniforme des intégrales obtenues par une double dérivation sous le signe.

Nous allons démontrer le théorème suivant:

Si l'intégrale $P(x, t)$ converge pour une certaine valeur x_0, t_0, elle converge pour toutes les valeurs x, t avec $0\leqslant t<t_0$ et représente dans ce domaine une solution de l'équation de la chaleur satisfaisant à la condition initiale donnée.

§ 4. Etant donnée une solution quelconque de l'équation de la chaleur $u(x, t)$ — $\infty<x<+\infty$, $t>0$, sous quelles conditions $u(x, t)$ est-elle représentée par l'intégrale de Poisson?

Établissons pour cela deux conditions différentes. La première condition, nécessaire et suffisante, découle de l'étude de la structure analytique de $u(0, t)$ et de $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$ (ces fonctions, comme nous venons de le voir dans le § 2, déterminent complètement une solution).

La seconde condition (suffisante) s'obtient par une restriction concernant le caractère de croissance de $u(x, t)$ pour $x\to\infty$.

On peut formuler la première condition ainsi:

Pour que $u(x, t)$ soit une solution de l'équation de la chaleur, représentable par l'intégrale de Poisson, il faut et il suffit que

$$u\left(0, \frac{1}{t}\right) \cdot \sqrt{t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\left(0, \frac{1}{t}\right) \cdot t^{3/2}$$

soient les transformées de Laplace des fonctions continues.*

§ 5. Désignons par $f(x) = \max_{0 \leq t' \leq t_0} u(x, t')$.

S'il existe un C tel que $f(x) \cdot e^{Cx^2} \underset{|x| \to \infty}{\to} 0$, (I)

alors il ne peut exister deux différentes solutions de l'équation de la chaleur satisfaisant à la condition (I) et se réduisant à la même fonction pour $t = 0$. Dans ce cas $u(x, t)$ s'exprime par l'intégrale de Poisson. Remarquons que, parmi les fonctions construites dans le § 1 et qui ne satisfont pas à la condition d'unicité, il est facile de trouver des fonctions pour lesquelles

$$f(x) \leqslant e^{x^{2+\varepsilon}},$$

ε étant arbitrairement petit.

§ 6. Considérons le problème: trouver la solution $u(x, t)$ de l'équation de la chaleur pour laquelle

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x \geqslant 0); \quad u(0, t) = \mu(t) \quad (t > 0)$$

(premier problème aux limites pour une demi-droite infinie). Ce problème n'admet pas de solution unique, comme on peut s'en persuader par un raisonnement analogue à celui du § 1.

Si nous imposons la conditions (voir au § 5)

$$f(x) \cdot e^{\alpha x^2} \underset{x \to \infty}{\to} 0,$$

nous obtenons une seule solution, qui peut être représentée sous la forme

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{x}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \right\} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

§ 7. Considérons le problème de Fourier: déterminer une solution $u(x, t)$ de l'équation de la chaleur ($x \geqslant 0$, $t > -\infty$) satisfaisant à la condition

$$u(0, t) = \mu(t).$$

Évidemment ce problème est indéterminé, car

$$u(x, t) = x \cdot F_1(t) + \frac{x^3}{3!} F_1'(t) + \ldots$$

satisfait aux conditions du problème pour $\mu(t) = 0$, pourvu que cette série converge. Si $F_1(t)$ est un polynôme, alors

$$\text{pour } n = 0 \quad u_0(x, t) = kx,$$
$$\text{» } \quad n = 1 \quad u_1(x, t) = k_1 xt + \left(kx + k_1 \frac{x^3}{3!}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous démontrons que sous la condition

$$\left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \right| < M$$

la différence $\overline{u}(x, t) - \overline{\overline{u}}(x, t)$

* Quant aux condition pour qu'une fonction $f(t)$ sois la transformée de Laplace

$$f(t) = \int_0^\infty e^{-t\alpha} g(\alpha)\, d\alpha,$$

voire Widder (1).

de deux fonctions satisfaisant aux conditions du problème de Fourier, est justement le polynôme $u_n(x, t)$ (satisfaisant à l'équations de la chaleur).

En particulier, si $n=0$,

$$\overline{u}(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\,e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}\,\mu(\tau)\,d\tau.$$

§ 8. Considérons le problème suivant: déterminer une solutions $u(x, t)$ de l'équation de la chaleur (pour $x\geqslant 0$ et $t<0$), s'il est donné

$$u(x, 0)=\varphi(x).$$

Ce problème, ainsi que le précédent, n'est pas déterminé, sans des conditions complémentaires, puisque

$$u(x, t)=F(t)+xF_1(t)+\frac{x^2}{2!}F'(t)+\frac{x^3}{3!}F_1'(t)+\ldots \qquad (t<0)$$

est une solution du problème posé pour $\varphi(x)=0$ pourvu que la série converge, si $F(t)$ et $F_1(t)$ s'annulent avec toutes leurs dérivées pour $t=0$ (il existe de telles fonctions $F(t)$ et $F_1(t)$, voir au § 1).

Nous avons démontré:

Si $u_1(x, t)$ et $u_2(x, t)$ satisfont au problème posé et si

$$\left|\frac{\partial^n u_1(x, t)}{\partial x^n}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^n u_2(x, t)}{\partial x^n}\right|$$

sont bornées (uniformément), $u_1(x, t)=u_2(x, t)$.

En effet, si $n=0$, c'est-à-dire que la fonction $u(x, t)=u_1(x, t)-u_2(x, t)$ est bornée, on a:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{(-\tau)^{3/2}}\,e^{-\frac{x^2}{4(-\tau)}}\,\mu(\tau)\,d\tau,$$

où $u(0, t)=\mu(\tau)$ (voir au § 7).

Au moyen de transformations simples nous obtenons

$$\overline{\varphi}(\alpha)=\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha z}\,\overline{\mu}(z)\,dz,$$

où

$$\alpha=x^2; \qquad z=-\frac{1}{4\tau};$$

$$\overline{\varphi}\,\alpha=\frac{\varphi(\sqrt{\alpha})}{\sqrt{\alpha}};$$

$$\overline{\mu}(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\mu\left(-\frac{1}{4z}\right)}{\sqrt{z}}.$$

Si $\varphi(x)=0$ alors $\overline{\varphi}(\alpha)=0$; par suite $\overline{\mu}(z)=0$ en vertu du théorème de Lerch (2), donc $\mu(t)=0$.

Le cas général pour n arbitraire se réduit au précédent par une simple dérivation.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITTÉRATURE CITÉE

1 Widder. Transactions of the American Math. Soc., v. 36 (1934). 2 Lerch. Acta Math., t. 27.

Manuscrit reçu
le 20. I. 1935.

ФИЗИКА

С. ШУБИН

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ВЫВОД СТАТИСТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ, ЛЕЖАЩИХ В ОСНОВЕ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

(Представлено академиком С. И. Вавиловым 17 XII 1934)

Недавно Крутков дал простое доказательство известного утверждения: „малая часть микроканонического собрания систем с большим числом степеней свободы распределена по фазе канонически“ (1). Цель настоящей заметки заключается в том, чтобы, идя аналогичным путем, вывести формулы обобщенного канонического распределения, лежащие в основе химической термодинамики. При этом удобно рассматривать отдельно классический и квантовый случай.

1. Классическая теория. Рассмотрим две микросистемы α и β и предположим для определенности, что обе эти системы состоят из одинаковых молекул одного сорта, причем каждая молекула построена из S одинаковых атомов и обладает фактором симметрии σ. Пусть, далее, обе системы находятся в газообразной или жидкой фазе.

Установим (a) свободный переход энергии и молекул между системами α и β и (b) свободный обмен атомами между всеми молекулами, входящими в состав α и β. Полученное таким путем многообразие состояний назовем системой γ.

Введем следующие обозначения: n — полное число молекул в системах α и β, $N = sn$ — полное число атомов в этих системах, $\omega_\alpha^{(\nu)}(\varepsilon)\,d\varepsilon$ — объем, заключенный между двумя изоэнергетическими поверхностями системы α, когда она состоит из ν определенным образом построенных молекул, $\omega_\beta^{(\nu)}(\varepsilon)\,d\varepsilon$ — аналогичная величина для системы β, $\omega^{(n)}(E)\,dR$ — объем, заключенный между двумя изоэнергетическими поверхностями полной системы γ.

Тогда, как нетрудно сообразить, мы будем иметь:

$$\omega^{(n)}(E) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{N!}{\nu!\,(n-\nu)!}\,\frac{1}{\sigma^n} \int_0^E \omega_\alpha^{(\nu)}(\varepsilon)\,\omega_\beta^{(n-\nu)}(E-\varepsilon)\,d\varepsilon. \tag{1}$$

Помножим обе части этого равенства на $e^{-\lambda E - \mu n}$, проинтегрируем по E от 0 до ∞ и просуммируем по n от 0 до ∞. Это нам дает

$$F(\lambda, \mu) = f_\alpha(\lambda, \mu)\,f_\beta(\lambda, \mu), \tag{2}$$

где

$$f_\alpha(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{\sigma^n} \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon - \mu n}\,\omega_\alpha^{(n)}(\varepsilon)\,d\varepsilon;$$

$$f_\rho(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{1}{\sigma^n} \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon - \mu n}\,\omega_\beta^{(n)}(\varepsilon)\,d\varepsilon; \tag{3}$$

$$F(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int_0^\infty e^{-\lambda E - \mu n}\,\omega^{(n)}(E)\,dE.$$

Из формулы типа (3)

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\sigma^n} \int_0^{\infty} e^{-\lambda\varepsilon - \mu n} \omega^{(n)}(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{3'}$$

непосредственно следует, что

$$\omega^{(n)}(\varepsilon) = \frac{n!\,\sigma^n}{(2\pi i)^2} \int_L d\lambda \int_M d\mu f(\lambda, \mu)\, e^{\lambda\varepsilon + \mu n}, \tag{4}$$

где интегрирование по λ идет от $c - i\infty$ до $c + i\infty$ ($c > 0$), а интегрирование по μ от $d - i\pi$ до $d + i\pi$. Анализ выражения (4) можно без труда точно провести для того случая, когда

$$\frac{1}{\sigma^n} \int_0^{\infty} e^{-\lambda\varepsilon} \omega^{(n)}(\varepsilon)\, d\varepsilon = [\varphi(\lambda)]^n \tag{5}$$

и следовательно

$$f(\lambda, \mu) = \exp[\varphi(\lambda)\, e^{-\mu}]. \tag{6}$$

В самом деле, если справедлива формула (6), то подынтегральное выражение в формуле (4)

$$e^{\lambda\varepsilon + \mu n + \varphi(\lambda) e^{-\mu}}$$

имеет на действительных осях переменных λ и μ (в заданной области их изменения) один единственный минимум при $\lambda = \Lambda$ и $\mu = \mathrm{M}$, причем Λ и M определяются из равенств

$$E + \varphi'(\Lambda)\, e^{-\mathrm{M}} = 0, \quad n - \varphi(\Lambda)\, e^{-\mathrm{M}} = 0. \tag{7}$$

Следовательно, проведя контур L через точку Λ, а контур M через точку M, мы можем для оценки интеграла (4) применять метод перевала. Для общего же случая применимость этого метода приходится предполагать без доказательств.

Сказанного уже вполне достаточно для того, чтобы получить формулы обобщенного канонического распределения Гиббса. В самом деле, при допущениях (*a*) и (*b*), единице объема фазового пространства системы α должен быть, очевидно, приписан статистический вес

$$w = \frac{N!}{\nu!\,(n-\nu)!} \frac{1}{\sigma^n} \frac{\omega_\beta^{(n-\nu)}(E - \varepsilon)}{\omega^{(n)}(E)}.$$

Если мы теперь предположим, что система β очень велика по сравнению с системой α, т. е. играет роль резервуара тепла и частиц*, то пользуясь формулами (2), (3) и (4) сейчас же получаем

$$w = \frac{1}{\nu!} \frac{1}{\sigma^\nu} \frac{e^{-\Lambda\varepsilon - \mathrm{M}\nu}}{f_\alpha(\Lambda, \mathrm{M})}. \tag{8}$$

А это есть ни что иное, как формула Гиббса, уточненная введением фактора симметрии σ.

Совершенно аналогично могут быть разобраны и другие случаи. Пусть напр. система α представляет собою кристалл, а система β — попрежнему жидкость или газ. Тогда, предполагая частицы, образующие обе системы, неразложимыми, мы — вместо (1) — очевидно получаем

$$\omega^{(n)}(E) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n!}{(n-\nu)!} \int_0^E \omega_\alpha^{(\nu)}(\varepsilon)\, \omega_\beta^{(n-\nu)}(E - \varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{9}$$

* Как мне любезно указал проф. Ю. А. Крутков, идея введения резервуара частиц была впервые высказана им в „Замечании о статистических системах с переменным числом частиц“(2).

(поскольку, кроме $\frac{n!}{\nu!(n-\nu)!}$ возможностей обмена частиц между α и β, здесь существует еще $\nu!$ возможностей расстановки их внутри системы α). Поэтому „фазовая сумма“ для кристалла с переменным числом частиц есть

$$f_\alpha(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon - \mu n}\, \omega_\alpha^{(n)}(\varepsilon)\, d\varepsilon; \tag{10}$$

в частности при

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon}\, \omega_\alpha^{(n)}(\varepsilon)\, d\varepsilon = [\varphi(\lambda)]^n$$

она равна

$$f(\lambda, \mu) = \frac{1}{1 - \varphi(\lambda) e^{-\mu}}. \tag{11}$$

2. Квантовая теория. Основное изменение, вносимое квантовой теорией в предшествующие рассуждения, заключается, как известно, в том, что там перестановка тождественных частиц не создает нового состояния системы. Поэтому, в квантовой теории — при непрерывном спектре Eigenwert'ов — мы вместо формул (1) или (9) всегда получаем:

$$\omega^{(n)}(E) = \sum_{\nu=0}^{n} \int_0^E \omega_\alpha^{(\nu)}(\varepsilon)\, \omega_\beta^{(n-\nu)}(E-\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{12}$$

и сообразно этому для обобщенного статистического интеграла всегда имеем выражение типа (10)

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon - \mu n}\, \omega^{(n)}(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{13}$$

(в случае дискретного спектра интеграл по ε должен быть, очевидно, заменен суммой).

Для иллюстрации формулы (13) разберем тот случай, когда наша система состоит из одинаковых слабо взаимодействующих частиц, причем уровни энергии каждой частицы $\varepsilon_1\ \varepsilon_2 \ldots$ не вырождены ([3]). Тогда

$$\varepsilon = \sum_i n_i \varepsilon_i,\ \omega^{(n)}(\varepsilon) = 1,\ \sum_i n_i = n, \tag{14}$$

где n_i число частиц с энергией ε_i.

Формула 13 (или, вернее, видоизменение ее для дискретного спектра) дает в этом случае

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} {\sum_{n_i}}^{*} e^{-\left(\lambda \sum_i n_i \varepsilon_i + \mu \sum_i n_i\right)} = \sum_{n_i} e^{-\left(\lambda \sum_i n_i \varepsilon_i + \mu \sum_i n_i\right)} = \prod_i \left(\mathop{\mathrm{S}}_{n_i} e^{-(\lambda\varepsilon_i + \mu) n_i} \right), \tag{15}$$

где ${\sum_{n_i}}^{*}$ означает суммирование по всевозможным значениям всех n_i, стесненным третьим из равенств (14), $\sum_{n_i}$ — суммирование по всевозможным значениям всех n_i свободное от этого ограничения и $\mathop{\mathrm{S}}_{n_i}$ — суммирование по всевозможным значениям одного из n_i.

Если каждое из n_i может принимать все значения от 0 до ∞, то мы получаем

$$f(\lambda, \mu) = \prod_i \frac{1}{1 - e^{-(\lambda\varepsilon_i - \mu)}}. \qquad (16)$$

Это есть фазовая сумма в статистике Бозе-Эйнштейна.

Если каждое из n_i может принимать значения 0 и 1, то

$$f(\lambda, \mu) = \prod_i (1 + e^{-(\lambda\varepsilon_i + \mu)}). \qquad (17)$$

Это есть фазовая сумма в статистике Ферми-Дирака.

Переход от формул (16) и (17) к обычным статистическим формулам проводится изложенным методом столь же просто, как он проведен напр. в книге Фаулера.

Уральский физико-технический институт.
Свердловск.

Поступило
17 XII 1934.

PHYSIK

EINE ELEMENTARE ABLEITUNG DER STATISTISCHEN GRUNDFORMELN DER CHEMISCHEN THERMODYNAMIK

Von G. ŠUBIN (SCHUBIN).

(*Vorgelegt von S. Wawilow, Mitglied der Akademie, d. 17. XII. 1934*)

Unlängst gab Krutkow einen einfachen Beweis der bekannten Behauptung: „Ein kleiner Teil einer mikrokanonischen Gesamtheit eines Systems von vielen Freiheitsgraden ist kanonisch in der Phase verteilt“ (1). In vorliegender kurzer Notiz wollen wir zeigen, dass man auf ganz analogem Weg die Formeln der verallgemeinerten kanonischen Verteilung ableiten kann, die der chemischen Thermodynamik zu Grunde liegen. Dabei empfielt es sich, natürlich, den klassischen Fall und den Quantenfall einzeln zu behandeln.

1. Klassische Theorie. Wir betrachten zwei Makrosysteme α und β und machen, um ein konkretes Beispiel ins Auge zu fassen, folgende Voraussetzungen: Beide Systeme bestehen aus gleichen Molekülen einer Art, jedes Molekül ist aus S gleichartigen Atomen aufgebaut und besitzt einen Symmetriefactor σ. Ausserdem sollen sich beide Systeme in der Gasphase befinden.

Wir nehmen (a) freien Übergang von Energie und Molekülen zwischen den Systemen α und β und (b) Atomaustausch zwischen sämtlichen Molekülen von α und β an. Die auf diese Weise erhaltene Mannigfaltigkeit von Zuständen bezeichnen wir als System γ.

Wir führen ferner folgende Bezeichnungen ein:

n — Gesamtzahl der Moleküle in den Systemen α und β;

$N = sn$ — Gesamtzahl der Atome in diesen Systemen;

$\omega^{(\nu)}_{\alpha}(\varepsilon)\, d\varepsilon$ — Phasenausdehnung zwischen zwei Energieflächen des Systems α, wenn dieses System aus ν aus bestimmten Atomen aufgebauten Molekülen besteht;

$\omega^{(\nu)}_{\beta}(\varepsilon)\, d\varepsilon$ — die entsprechende Grösse für das System β;

$\omega^{(n)}(E)\, dE$ — Phasenausdehnung zwischen zwei Energieflächen des Systems γ.

Dann haben wir, wie man leicht einsieht,

$$\omega^{(n)}(E) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{N!}{\nu!(n-\nu)!} \frac{1}{\sigma^n} \int_0^E \omega_\alpha^{(\nu)}(\varepsilon)\, \omega_\beta^{(n-\nu)}(E-\varepsilon)\, d\varepsilon. \tag{1}$$

Wir multiplizieren beide Seiten dieser Gleichung mit $e^{-\lambda E - \mu n}$, integrieren über E von 0 bis ∞ und summieren über n von 0 bis ∞. Das ergibt

$$F(\lambda, \mu) = f_\alpha(\lambda, \mu) f_\beta(\lambda, \mu), \tag{2}$$

wobei

$$\begin{aligned} f_\alpha(\lambda, \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\sigma^n} \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon - \mu n}\, \omega_\alpha^{(n)}(\varepsilon)\, d\varepsilon; \\ f_\beta(\lambda, \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\sigma^n} \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon - \mu n}\, \omega_\beta^{(n)}(\varepsilon)\, d\varepsilon; \\ F(\lambda, \mu) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \int_0^\infty e^{-\lambda E - \mu n}\, \omega^{(n)}(E)\, dE. \end{aligned} \tag{3}$$

Aus der Formel von Typus (3)

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{\sigma^n} \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon - \mu n}\, \omega^{(n)}(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{3'}$$

folgt unmittelbar

$$\omega^{(n)}(\varepsilon) = \frac{n!\,\sigma^n}{(2\pi i)^2} \int_L d\lambda \int_M d\mu f(\lambda, \mu)\, e^{\lambda\varepsilon + \mu n}, \tag{4}$$

wobei die Integration über λ von $c - i\infty$ bis $c + i\infty$ $(c > 0)$ und über μ von $d - i\pi$ bis $d + i\pi$ zu erstrecken ist.

Die Analyse des Ausdrucks (4) kann leicht für dem Fall durchgeführt werden, wenn

$$\frac{1}{\sigma^n} \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon}\, \omega^{(n)}(\varepsilon)\, d\varepsilon = [\varphi(\lambda)]^n \tag{5}$$

und folglich

$$f(\lambda, \mu) = \exp[\varphi(\lambda)\, e^{-\mu}] \tag{6}$$

ist. In der Tat, dann hat der unter dem Integral stehende Ausdruck der Formel (4) $e^{\lambda\varepsilon + \mu n + \varphi(\lambda) e^{-\mu}}$ auf den reellen Achsen der Variablen λ und μ (in dem gegebenen Variationsgebiet) ein einziges Minimum bei $\lambda = \Lambda$, $\mu = \mathrm{M}$, wobei Λ und M durch die Gleichungen

$$E + \varphi'(\Lambda) e^{-\mathrm{M}} = 0, \quad n - \varphi(\Lambda) e^{-\mathrm{M}} = 0 \tag{7}$$

bestimmt sind. Ziehen wir daher den Integrationsweg L durch den Punkt Λ und dem Integrationsweg M durch den Punkt M, so können wir zur Auswertung des Integrals die Sattelpunktmethode anwenden. Im allgemeinen Fall muss die Anwendbarkeit dieser Methode ohne Beweis hingenommen werden. Das Gesagte ist schon vollständig ausreichend, um die Gibbs'schen Formeln für die verallgemeinerte kanonische Verteilung zu erhalten. In der Tat, muss man augenscheinlich unter den Voraussetzungen (a) und (b) jeder Volumeinheit des Phasenraumes des Systems α das folgende statistische Gewicht

$$w = \frac{N!}{\nu!\,(n-\nu)!} \frac{1}{\sigma^n} \frac{\omega_\beta^{(n-\nu)}(E-\varepsilon)}{\omega^{(n)}(E)}$$

zuschreiben. Wenn wir nun annehmen, dass das System α sehr gross im Verhältnis zum System α ist — d. h. die Rolle eines Wärme- und Teilchenreservoirs * spielt — so erhalten wir unter Anwendung der Formeln (2), (3) und (4) den Ausdruck:

$$w = \frac{1}{\nu!}\,\frac{1}{\sigma^{\nu}}\,\frac{e^{-A\varepsilon - M\nu}}{f_{\alpha}(A, M)}\,. \tag{8}$$

Das ist aber nichts anderes als die durch Einführung des Symmetriefaktors σ vergenauigte Gibbs'sche Formel.

Ganz analog können auch andere Fälle behandelt werden. Das System α sei beispielsweise ein Kristall und das System β wie vorher eine Flüssigkeit oder ein Gas. Unter der Voraussetzung, dass die Teilchen, die beide Systeme bilden, nicht zerlegbar sind, bekommen wir dann anstelle der Gleichung (1) offenbar

$$\omega^{(n)}(E) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n!}{(n-\nu)!} \int_{0}^{E} \omega_{\alpha}^{(\nu)}(\varepsilon)\, \omega_{\beta}^{(n-\nu)}(E-\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{9}$$

(insofern als ausser $\frac{n!}{\nu!\,(n-\nu)!}$ Austauschmöglichkeiten der Teilchen zwischen α und β noch $\nu!$ Möglichkeiten ihrer Stellung innerhalb des Systems α bestehen). Infolgedessen ist die Zustandssumme für einen Kristall mit veränderlicher Teilchenzahl

$$f_{\alpha}(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda\varepsilon - \mu n}\, \omega_{\alpha}^{(n)}\, \varepsilon\, (d)\, \varepsilon. \tag{10}$$

Insbesondere für

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda\varepsilon}\, \omega^{(n)}(\varepsilon)\, d\varepsilon = [\varphi(\lambda)]^{n}$$

ist es gleich

$$f(\lambda, \mu) = \frac{1}{1 - \varphi(\lambda)\, e^{-\mu}}\,. \tag{11}$$

2. Quantentheorie. Die hauptsächliche Veränderung, die die Quantentheorie in die vorstehenden Überlegungen einführt, besteht bekanntlich darin, dass hier eine Permutation gleichartiger Teilchen keinen neuen Zustand des Systems ergibt. Infolgedessen erhalten wir in der Quantentheorie (bei kontinuierlichem Spektrum der Eigenwerte) anstelle der Formel (1) oder (9) immer

$$\omega^{(n)}(E) = \sum_{\nu=0}^{n} \int_{0}^{E} e_{\alpha}^{\nu}(\varepsilon)\, \omega^{(n-\nu)}(E-\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{12}$$

und dementsprechend für das „Zustandsintegral"

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda\varepsilon - \mu n}\, \omega^{(n)}(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{13}$$

(im Falle eines diskreten Spektrums muss das Integral über ε durch eine Summe ersetzt werden).

* Wie mir Prof. Krutkow liebenswürdigerweise mitteilte, hat er den Gedanken der Einführung des Teilchenreservoirs zuerst in der Arbeit „Bemerkungen über die statistischen Systeme mit veränderlicher Teilchenzahl" (2) dargelegt.

Zur Illustration der Formel (13) betrachten wir den Fall, wenn unser System aus gleichartigen schwach gekoppelten Teilchen besteht, wobei die Energieniveaus jedes Teilchens $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nicht entartet sind (3). Dann haben wir

$$\varepsilon = \sum_i n_i \varepsilon_i, \quad \omega^{(n)}(\varepsilon) = 1, \quad \sum_i n_i = n, \tag{14}$$

wo n_i die Anzahl der Teilchen mit der Energie ε_i ist.

Die Formel (13) (oder, genauer gesagt, ihre Modifikation für das diskrete Spektrum) ergibt in diesem Falle

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_i}^{*} e^{-(\lambda \sum_i n_i \varepsilon_i + \mu \sum_i n_i)} = \sum_{n_i} e^{-(\lambda \sum_i n_i \varepsilon_i + \mu \sum_i n_i)} =$$

$$= \prod_i \left(\mathop{S}_{n_i} e^{-(\lambda \varepsilon_i + \mu) n_i} \right), \tag{15}$$

wobei $\sum_{n_i}^{*}$ die Summierung über alle möglichen Werte aller n_i bedeutet, die durch die dritte der Gleichungen (14) eingeschränkt sind, $\sum_{n_i}$ — die Summierung über alle möglichen Werte aller n_i und $\mathop{S}_{n_i}$ — die Summierung über alle möglichen Werte eines der n_i.

Wenn jedes n_i alle Werte von 0 bis ∞ annehmen kann, so bekommen wir

$$f(\lambda, \mu) = \prod_i \frac{1}{1 - e^{-(\lambda \varepsilon_i + \mu)}}. \tag{16}$$

Das ist die Zustandssumme für die Bose-Einsteinsche Statistik.

Kann jedes n_i die Werte 0 und 1 annehmen, so wird

$$f(\lambda, \mu) = \prod_i (1 + e^{-(\lambda \varepsilon_i + \mu)}). \tag{17}$$

Das ist die Zustandssumme für die Fermi-Diracsche Statistik.

Der Übergang von Formeln (16) und (17) zu den üblichen statistischen Formeln wird durch die dargelegte Methode ebenso einfach vermittelt, wie, zum Beispiel, bei Fowler.

Physikalisch-technisches Institut.
Swerdlowsk.

Eingegangen
d. 17. XII. 1934

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

1 ZS. f. Phys., 81, 377, 1933. 2 ЖРФХО, т. XLVI, вып. 8, стр. 345 (1914). Journ. d. russ. phys.-chem. Ges., Bd. XLVI, H. 8, S. 345 (1914). 3 W. Pauli. ZS. f. Phys., 41, 21, 1927.

С. М. ГУТМАН, П. А. РЕБИНДЕР, член-корреспондент Академии Наук СССР, М. Д. ШУЛЬВАС, М. Е. ЛИПЕЦ и М. М. РИМСКАЯ

КОЛЛОИДНО-ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОТДЕЛЕНИЯ ШЛАКОВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ, ВЫДЕЛЕННЫХ ИЗ СТАЛИ, ОТ КАРБИДОВ

Огромный интерес, проявляемый металлургами к изучению шлаковых включений, объясняется установленным вредным влиянием их на технические качества металла. Очень часто вопрос о его пригодности решается в зависимости от количества включений, их распределения, размеров, химического состава и физических особенностей. Но кроме того знание природы шлаковых включений является одним из наиболее действительных методов контроля металлургического процесса, с сущностью которого связано их происхождение. Так как все элементы, участвующие в получении стали, вовлекаются в процесс образования шлаковых включений, то знание их природы в изготовленном металле позволяет проследить те или иные особенности или неправильности в металлургическом процессе и добиться его усовершенствования.

Поэтому совершенно понятны усиленные искания практически удобных и точных методов определения шлаковых включений.

Наряду с металлографическими методами, дающими возможность получить довольно точное представление о природе и распределении шлаковых включений в металле, в последнее время большое значение приобретают также химические методы их изучения, при которых включения выделяются из металла в свободном состоянии — путем его разложения различными реагентами (галогены, слабые растворы неорганических кислот, нейтральные растворы солей и пр.) ([1]).

Преимущество этих методов перед металлографическим состоит в том, что изолированные из металла шлаковые включения являются несравненно более удобным для всестороннего изучения объектом, чем при исследовании их на шлифе. Но отрицательной стороной применяющихся до настоящего времени химических методов является то, что ими удается выделить только более крупные и наиболее устойчивые шлаковые включения, менее же химически-устойчивые включения, составляющие иногда главную их массу, разрушаются или теряются в процессе разложения металла или же во время последующих обработок шлакового остатка для его очистки от выделяющихся одновременно с ним углерода или карбидов, которые мешают его исследованию.

В настоящее время наибольшую ценность представляют электролитические методы выделения включений. По методу Фиттерера, получившему широкое распространение в лабораторной практике ([2]), исследуемый образец стали в качестве анода растворяется при электролизе в слабом нейтральном растворе $FeSO_4$ (3%), NaCl (1%). Для удобства он помещается в коллодионном мешечке, в котором остаются включения, выделяющиеся в процессе растворения металла. Так как изолирование включений достигается в нейтральной среде, то удается значительно уменьшить опасность их разрушения в процессе выделения из металла. Но в коллодионном мешечке скопляется также вся масса одновременно выделяющихся из стали карбидов. Чтобы освободиться от них, шлаковый остаток обычно обрабатывают при нагревании

смесью растворов азотной кислоты и перманганата; при этом, конечно, разрушаются также неустойчивые виды включений. Таким образом теряются все преимущества этого метода перед другими методами химического воздействия.

То же самое относится к методу Трейс и Бенедикса, при котором исследуемая проба растворяется при электролизе в нейтральном растворе бромистого калия, уксуснокислого натрия и сернокислой меди ([3]) и также к методу Скотта, который работает с иодистым магнием в качестве электролита ([4]).

Электролитические методы оказались бы, несомненно, наиболее совершенными из всех предложенных, если бы удалось преодолеть этот обесценивающий их недостаток. Поэтому в лаборатории Центрального института металлов делались многочисленные опыты применения механических методов отделения шлакового остатка от карбидов, но все они оказались мало успешными вследствие прочного взаимного прилипания дисперсных частиц карбидов и шлаковых включений. В этой работе, в Лаборатории физико-химии поверхностных явлений и флотационных процессов Центрального института цветных металлов, мы применили методы разделения, основанные на молекулярно-поверхностных явлениях. Все такие методы разделения порошков (освобожденных дисперсных включений) связаны с возможно более резким различием в молекулярной природе поверхности частиц разделяемых компонентов. Если расположить включения в стали по молекулярной природе поверхности, т. е. по степени гидрофильности — по избирательной смачиваемости водой в присутствии неполярной (углеводородной) жидкости ([5]), то мы получим следующий ряд:

графит (гидрофобн.) < железо металл < карбид железа < сульфиды MnS, FeS < окислы Fe_3O_4, FeO < Al_2O_3 < шпинели < SiO_2

гидрофильность ⟶

Чем далее отстоят друг от друга два члена этого ряда, тем легче они подвергаются разделению. Само разделение может быть основано:

1) на различной смачиваемости или прилипаемости дисперсных частиц различной молекулярной природы к поверхностям раздела (флотационные методы разделения);

2) на различной пептизируемости (стабилизуемости) частиц различных компонентов в суспензии под влиянием специальных пептизаторов, образующих адсорбционные защитные пленки лишь на частицах одного вида;

3) на избирательной диспергируемости и на избирательном повышении диспергируемости под влиянием адсорбирующихся веществ, могущих служить в дальнейшем и избирательными пептизаторами.

Все эти методы были испробованы нами для отделения шлаковых включений от карбидов, но полученные результаты не давали возможности полного разделения, очевидно, вследствие недостаточно резкого отличия шлаков от карбидов по молекулярной природе поверхности.

Здесь надо заметить, что в предыдущих работах нашей лаборатории разработаны тонкие методы изменения молекулярной природы под влиянием адсорбционных слоев ориентированных органических молекул при селективной адсорбции. Применение этих методов в принципе позволяет

увеличить до предела различие в молекулярной природе разделяемых компонентов, когда эти различия первоначально невелики, и тем обеспечить полное разделение, как напр. при селективной флотации. Мы предполагаем, что в дальнейшем применение этих методов „селективного регулирования" природы поверхности частиц — их гидрофильности — позволит, быть может, говорить не только об отделении шлаковых включений от карбидов, но и о разделении этих включений на отдельные составляющие (сульфиды, силикаты, окислы).

Однако в настоящее время мы добились наиболее полного отделения всех видов шлаковых включений после того, как, благодаря предварительному разложению карбидов, проблема свелась к отделению шлаковых включений от карбидного углерода (графита), резко отличающегося от них своей гидрофобностью. Кроме того разложение карбидов уменьшило резкое различие в весовом отношении разделяемых компонентов (для стали с 1% С отношение $\frac{\text{карбиды}}{\text{шлаки}} = 75$, а $\frac{\text{карбидный углерод}}{\text{шлаки}} = 5$ при содержании шлаков 0.2%), что в дальнейшем явилось важным преимуществом: уменьшился удельный вес частиц, отделяемых от шлаков (у карбидов $D = 7$, а у графита $D = 2.3$).

Применялся метод разложения карбидов, которым пользуются также для выделения включений в стали ([6]). Шлаковый остаток, тщательно промытый, обрабатывался при энергичном взбалтывании нейтральным разбавленным раствором $CuCl_2 2NH_4Cl$. При этом протекает реакция:

$$Fe_3C + 6\,CuCl_2 = 3FeCl_2 + 6\,CuCl + C.$$

Наиболее простые методы флотационного разделения: разделение под влиянием избирательного смачивания при встряхивании порошков с водой и бензолом — масляная флотация, а также пенная флотация при введении различных типичных коллекторов и депрессантов, не дали достаточно удовлетворительных количественных результатов. Применение же избирательной пептизации (стабилизации в водной суспензии графита таннином, ализарина сульфонатом натрия в щелочной среде или сульфитными щелоками) дало весьма хороший результат. Весь графит оставался в виде первичных, т. е. наиболее мелких взвешенных частиц, и лишь крупные массивные его частицы оседали на дно сосуда вместе с кристалликами шлаковых включений.

Для отделения же крупных первичных частиц графита от шлаковых включений мы применили метод избирательного диспергирования графита встряхиванием всей суспензии в цилиндре со стеклянными шариками (бусами) в присутствии того же пептизатора, играющего теперь роль и понизителя твердости ([7]). При его избирательной адсорбции на вновь образующейся поверхности частиц гидрофобного графита — на поверхностях микротрещин — работа диспергирования, т. е. работа образования новой поверхности (распыление трещин) значительно понижается, как это было показано в ряде работ этой лаборатории по физико-химии диспергирующего (истирающего) и смазывающего действия. При избирательном истирании с пептизатором (0.2% таннина, 0.1—0.2% Na_2SiO_3 и 0.001% NH_3 в растворе) весь графит действительно легко переводится в высоко-дисперсную, отчасти коллоидно-дисперсную, устойчивую суспензию, не оседающую вовсе в течение долгого времени (только через 3 часа графит начинает понемногу входить в осадок).

После отстаивания на дне цилиндра, делаемом для удобства съемным, на пришлифованных закраинках оседают кристаллики шлаковых

включений. Микроскопическое исследование дает нам полную картину неповрежденных шлаковых включений, содержащихся в стали, полностью освобожденных от углерода. Явственно видны включения разных видов, подробно описанные в работах Бенедикса ([8]), Дикинсона ([9]), Херти и других. По размерам частиц выделенные нами включения распадаются на три группы: 1) 1.1—2.2—5 μ, 2) 11—22 μ и 3) тонкие палочки сульфидов длиной до 110—170 μ и диаметром 5—11 μ. По весу в отдельных случаях было выделено из 100 г стали 0.15 г включений, что составляет по грубой оценке 80—90% всех содержащихся в стали включений.

Остальная же небольшая доля включений, не выделившихся в осадок, остается в растворе или легко уходит с промывными водами; это — наиболее мелкие частицы $\leqslant 1$ μ. Они остаются во взвешенном состоянии и не могут быть отделены от взвешенного графита, являясь по отношению к нему изоседиментирующими, т. е. удовлетворяющими условию $r_a^2(D_a - 1) = r_b^2(D_b - 1)$, где r_a, D_a — радиус и плотность частиц графита, а r_b, D_b — данного шлакового включения. Часть их, также как и значительная часть карбидного графита, находится в состоянии ультрамикроскопических коллоидно-дисперсных частиц (применение седиментометрического анализа с расчетом по формуле Стокса показало, что средний размер частиц пептизированного графита — около 2 μ. Они начинают оседать в заметном количестве через 3—4 часа (при высоте цилиндра в 14 см). Во избежание какой-либо возможности дробления шлаковых включений при диспергировании графита, мы стремились сделать механическое воздействие возможно более слабым, применяя слабое взбалтывание в шюттель-аппарате или от руки и уменьшая количество стеклянных бус. Однако наличие в осадке тонких и длинных палочек сульфидов, длина которых иногда в 10—20 раз превышает поперечный диаметр, позволяет считать, что если частичное дробление шлаков и имеет место, то лишь в самой незначительной степени.

Разработка и дальнейшее усовершенствование коллоидно-физико-химических методов выделения шлаковых включений в стали представляет исключительный интерес, как для подробного учета и анализа этих включений, так и для их микрохимического и петрографического исследования. Даже первые, еще несовершенные, попытки в этом направлении дают весьма положительные результаты, увеличивая в 10—20 раз количество освобожденных включений. Описанный метод облегчает исследование выделенных включений при всех многочисленных методах экстракции, при которых шлаковый остаток получается загрязненным карбидами или карбидным графитом.

Заключение

Разработан метод отделения шлаковых включений, выделяемых из углеродистых сталей, от карбидного углерода (графита после предварительного разложения карбидов). Метод основан на избирательном диспергировании и пептизации графита (в водно-щелочных растворах таннина или сульфит-целлюлезного экстракта в качестве пептизатора). Указаны возможности отделения шлаковых включений непосредственно от карбидов, а также и друг от друга, комбинированными коллоидно-физико-химическими методами избирательной пептизации и флотации.

Институт металлов. Ленинград.
Институт цветных металлов.
Лаборатория физико-химии поверхностных явлений
и флотационных процессов. Москва.

Поступило
5 I 1935.

KOLLOIDAL-PHYSIKALISCH-CHEMISCHE METHODEN ZUR TRENNUNG DER AUS STAHL AUSGESCHIEDENEN SCHLACKENEINSCHLÜSSE VON DEN KARBIDEN

Von S. GUTMANN, P. REHBINDER, korrespondierendem Mitglied der Akademie, M. SCHULWAS, M. LIPETZ und M. RIMSKAJA

ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde eine Methode zur Trennung der aus Stahlen mit 0.3—1.0% C ausgeschiedenen Schlackeneinschlüsse vom Karbid-Kohlenstoff (Graphit) ausgearbeitet. Die Karbide wurden vorher unter Wirkung einer neutralen $CuCl_2 \cdot 2NH_4Cl$-Lösung chemisch zerlegt.

Die Trennungsmethode besteht in einer selektiven Dispersion und Peptisation von Graphit in wässerigen Tannin- bzw. Na-alizarinsulfonatlösungen (mit 0.01-*n* NaOH bzw. mit Na_2SiO_3). Die frei werdenden Schlackeneinschlüsse sammeln sich am Boden an und können mikroskopisch untersucht werden. Dabei werden 0.1—0.15 g aus 100 g Stahl nach den gewöhnlichen chemischen Methoden erhalten.

Es wird auch auf die Möglichkeit hingewiesen, die Schlackeneinsclüsse mit Hilfe selektiver Flotation, Dispergierung und Peptisation unmittelbar von den Karbiden wie auch voneinander abzutrennen.

Alle diese Methoden beruhen auf den Unterschieden in der molekularen Natur der Oberfläche der zu trennenden Teilchen, und bestehen in einer Aufhebung des gegenseitigen Anhaftens der Teilchen (z. B. Schlacke + + Graphit).

Forschungsinstitut für Metalle. Leningrad.
Forschungsinstitut für Nichteisenmetalle.
Laboratorium der Grenzflächenerscheinungen und Flotationstheorie. Moskau.

Eingegangen d. 5. I. 1935.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] Н. Лёве. Сталь, № 4—5, 87 (1933). N. Löwe. Stahl (russ. ZS.), № 4—5, 87 (1933). [2] G. R. Fitterer. Journal Amer. Inst. Min. Metal. Eng., 440 (1931). [3] R. Benedicks. Jernkontorets Annaler, 1932, 1—4, 165. [4] F. W. Scott. Ind. Eng. Chem., Analyt. Ed., 4 (1932), p. 121. [5] П. А. Ребиндер при уч. М. Е. Липец, М. М. Римской и А. Б. Таубмана. Физико-химия флотационных процессов. М.—Л. (1933). P. Rehbinder, M. Lipetz, M. Rimskaja und A. Taubmann. Physical Chemistry of Flotation. 1933 (russ.). — P. Rehbinder, M. Lipetz und M. Rimskaja. Koll. ZS., 65, 268 (1933); 66, 40. 212, 273 (1934). [6] F. Willems. Arch. f. d. Eisenhüttenw., 10, 1928, S. 658. — P. Rehbinder und N. Kalinowskaja. Phys. ZS. d. Sowjetun., 4, 2, 365 (1933). — P. Rehbinder. ZS. f. Physik, 72, 191 (1931). [7] C. Benedicks and H. Lofquist. Slagginnes in Jern och Stäl. Nordiska Bokhandeln. Stockholm, 1929. [8] J. Dickenson. Journ. Iron and Steel Inst., 113 (1926), 117. — Idem. Техника и Производство, 1929, № 6—7, стр. 1—15. [9] C. H. Herty. Min. Met. Invest. Pittsburgh Bulletin, 34. 36, 38, 46. — Ю. Лукашевич-Дуванова. Сообщения ВИМ, 1934, № 1/2, стр. 12.

Академик Н. Д. ЗЕЛИНСКИЙ, Я. И. ДЕНИСЕНКО и М. С. ЭВЕНТОВА

О ЦИКЛОГЕКСАДИЕНАХ

Все, что известно в литературе об этих углеводородах не дает ясного представления об их свойствах и взаимоотношениях. Данные разных авторов не совпадают между собой и нет полной картины, в какой мере каждый из изомерных циклогексадиенов можно считать за индивидуальный препарат. Приводим сводку констант этих углеводородов, чтобы убедиться в сказанном (см. стр. 314—315).

Как видно из приведенных свойств обоих циклогексадиенов, они не представляют вполне однородных веществ, и каждый из них — смесь, в которой преобладает то один, то другой изомер. Однако, химическая природа циклогексадиенов настолько привлекает к себе внимание, что, желая ближе разобраться в изомерии этих углеводородов, мы и предприняли это исследование.

Получение циклогексадиенов

Исходным продуктом нам служил cis-хинит (препарат Poulenc-Frères). К одному молю cis-хинита, помещенному в колбу Вюрца, снабженную хорошим холодильником, прибавлялся мелкоистертый свежепрокаленный сульфат магния (2 мол.). В течение реакции при медленном нагревании колбы на воздушной бане, продолжавшемся 4—5 час., пропускался ток угольной кислоты, уносившей образующийся углеводород в хорошо охлаждаемый приемник. Продукт реакции отделялся от воды, промывался слабой щелочью и сушился над сплавленным поташом. Ведя отщепление воды в этих условиях, мы повысили выход циклогексадиенов с т. к. 80—89° до 65% теоретических против 40% получаемых нами ранее.

При действии на хинит свежесплавленного и измельченного бисульфата калия получался тот же выход, но с тем отличием, что в этом случае в полученной смеси обоих циклогексадиенов преобладал высококипящий изомер в отношении приблизительно 2:1, тогда как при применении сульфата магния получалось гораздо больше нижекипящего изомера (1,3-циклогексадиен) в отношении 8:1. Получение этих углеводородов в описанных условиях производилось несколько раз и приводило всегда к вышеуказанным результатам. Наряду с циклогексадиенами всегда образуется в небольших количествах Δ^3-циклогексенол (1), дегидратируя который можно еще несколько повысить выход циклогексадиенов. Мы имели таким образом несколько сот граммов углеводорода, который подвергли тщательному фракционированию над окисью бария с дефлегматором длиною в 1 м (Vigreux).

Первая фракционировка циклогексадиенов (125 г), полученных действием на хинит бисульфата калия и кипевших при 752 мм давления в пределах 80—89°, дала следующие результаты:

Фракция	т. к.	г
I	80—82°	25
II	82—86	36
III	86—88	53

1,3-Циклогексадиен—1,3-Zyklohexadien

Автор	т.к. Siedepunkt	d	n	MR вычисл. MR berechnet	MR найд. MR gefunden
Baeyer(1)	84—86° (718 mm)	—	—		
Forbey(2)	81—82°	$d\frac{15.5}{4}$ —0.84785	—		
Марковников(3) Markovnikov(3)	82—85° (767 mm)	$d\frac{20}{0}$ —0.853	—		
Crossley(4)	81.5—82°	$d\frac{15}{4}$ —0.8377	—		
Harries—Anton (5)	81.5°	$d\frac{19}{4}$ —0.8490	$n_{21.2}$ —1.47296		
Зелинский и Горский(6) Zelinskij u. Gorskij(6)	80.5°	$d\frac{20}{4}$ —0.8976	$n\frac{20}{d}$ —1.4700	26.77	26.66
Harries(7)	80—81°	$d\frac{22}{4}$ —0.8302	$n\frac{22}{d}$ —1.4642	„	26.60
Willstätter и Hatt(8)	78.3—78.8° (627 mm)	$d\frac{20}{4}$ — 0.8404	$n\frac{20}{d}$ —1.47439	„	26.80
Ипатьев(9) Ipatjev(9)	80—86°	$d\frac{20}{20}$ — 0.8311	—	„	
Harries(10)	80—80.5°	$d\frac{20}{20}$ —0.8421	$n\frac{20}{d}$ —1.47555	26.77	27.76
Senderens(11)	83—84° (750 mm)	$d\frac{10}{4}$ —0.8454	—		
Criegee(12)	81°	$d\frac{20}{4}$ —0.840	—		
Зелинский и Титова(13) Zelinskij u. Titova(13)	80—81° (760 mm)		$n\frac{19}{d}$ —1.4745		

Первая фракционировка циклогексадиенов (460 г), полученных действием на хинит сульфатом магния и кипевших в пределах 80—89° при 752 мм, дала следующие результаты:

Фракция	т. к.	г
I	80—82°	333
II	82—86	80
III	86—88	42.5

Углеводороды, кипевшие в одних пределах, соединялись вместе и подвергались повторной фракционировке при давлении 752 мм. При этом получены были следующие фракции:

Фракция	т. к.	г
I	80—81°	262
II	81—82	63

1,4-циклогексадиен—1,4-Zyklohexadien

т. к. Siedepunkt	d	n	MR выч. MR berechnet	MR найд. MR gefunden
—	—			
—	—			
83° — 86°	$d\frac{20}{0}$ —0 8463			
—	—			
81.5°	$d\frac{25}{4}$ —0.8333	$n\frac{25}{d}$ — 1.46806		
85.5°	$d\frac{20}{4}$ — 0.8471	$n\frac{20}{d}$ — 1.4729	26.77	26.50
—	—			
—	—			
—	—			
—	—			
86 — 88°	—			
—	—			
86.2—87.2° (760 mm)	—	n^{20} — 1.4745		

Фракция	т. к.	г
III	82 —84	15
IV	84 —85	45
V	85 —87	34
VI	87 —88	43
VII	88 —88.8	12
VIII	88.8—89.2	24

При взбалтывании одной-двух капель фракции циклогексадиена с т. к. 80—81° с алкоголь-серной кислотой наступает густое, темносине-фиолетовое окрашивание (реакция Байера). Фракция же с т. к. 88—88.8° дает фиолетово-вишневое окрашивание.

Как сказано выше, в зависимости от того, что служило дегидратирующим агентом, получается в преобладающем количестве циклогексадиен с т. к. 80—82° или 87—89°. Последние три вышекипящие фракции были подвергнуты снова фракционированию, причем удалось выделить угле-

водород с т. к. 88.8—89.2°. Одна капля 1,3-циклогексадиена с т. к. 80—81° внесенная в холодную смесь алкоголь-серной кислоты, постепенно вызывает темно-сине-фиолетовую окраску. В таких условиях вышекипящий изомер (т. к. 88—89°), 1,4-циклогексадиен дает розовое окрашивание со слабым сине-фиолетовым оттенком. Такое отношение позволяет сделать вывод, что в вышекипящем углеводороде мы имеем в индивидуальном состоянии 1,4-циклогексадиен. Это подтверждается как физическими свойствами, так и анализом. Можно считать теперь установленными следующие свойства 1,3 и 1,4-циклогексадиенов, резко отличающихся и по цветной реакции.

Циклогексадиен (1,3) т. к. 80.5—807° (752 мм)

$$d_4^{20} = 0.8451;\ d_4^{16} = 0.8489;\ n_D^{16} = 1.4766$$

M_D найдено 26.64, вычислено для $C_6H_8(2F) = 26.77$

Циклогексадиен (1,4) т. к. 88.4—89.4° (769 мм); в течение 18 дней хранился в присутствии безводного сульфата натрия

$$d_4^{20} = 0.8569;\ n_D^{15.2} = 1.4781$$

Анализ: 0.1467 вещества, 0.4830 CO_2, 0.1277 H_2O

C_6H_8 вычислено C = 89.93% H — 10.07%

„ найдено „ 89.76 „ 9.74

Тот же препарат с т. к. 88.8—89.2 (758 мм)

$$d_4^{17} = 0.8592;\quad n_D^{17} = 1.4748$$

$$M_D = 26.23$$

Этот же циклогексадиен (1,4), очищенный от следов 1,3-циклогексадиена малеиновым ангидридом

$$d_4^{20} = 0.8549;\quad d_4^{19} = 0.8559;\quad n_D^{19} = 1.4745$$

$$M_D = 26.31$$

Циклогексадиен (смесь изомеров) т. к. 85—87° (744 мм)

$$d_4^{20} = 0.8523;\quad d_4^{17} = 0.8543;\quad n_D^{17} = 1.4741$$

$$M_D = 26.34$$

Нас интересовал еще вопрос о циклогексаэритрите, который был бы изомером с таковым, полученным Зелинским и Титовой [14], исходя из циклогексадиена с т. к. 85—87°, в котором преобладал 1,4-циклогексадиен.

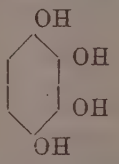
Окисление 1,3-циклогексадиена

Этот углеводород с т. к. 80—81° окислялся в закрытом сосуде вне доступа кислорода воздуха, снабженном быстро вращающейся мешалкой. Однопроцентный раствор перманганата (2 атома кислорода на 1 мол. циклогексадиена) приливался через капельную воронку с такой скоростью, чтобы температура в сосуде не превышала 0°, что контролировалось термометром, погруженным в реагирующую смесь. По окончании реакции и удалении перекиси марганца, водный раствор продуктов окисления при перегонке с водяным паром не дал летучих веществ. Он был насыщен угольной кислотой и упаривался на водяной бане до небольшого объема и затем экстрагировался абсолютным спиртом. По удалении спирта

остается сиропообразная жидкость, постепенно кристаллизующаяся в твердую, слегка окрашенную массу. Повторной кристаллизацией из абсолютного спирта получено бесцветное кристаллическое вещество сладкого вкуса с т. пл. 153—154°, очень легко растворимое в воде, менее в спирте и нерастворимое в эфире.

Анализ: 0.1112 г вещества — 0.1973 г CO_2 и 0.0809 г H_2O
вычислено C — 48.65% и H — 8.11%
$C_6H_{12}O_4$
найдено C — 48.39% H — 8.14%

Таким образом, при окислении циклогексадиена 1,3 нами получен циклогексаэритрит строения:



Если в таких же условиях подвергнуть окислению фракцию углеводорода с т. к. 86—89°, то получается в очень малом количестве циклогексаэритрит в виде иглообразных кристаллов, которые после перекристаллизации из воды плавятся при 239—240° и представляют менее легко растворимый в воде циклогексаэритрит (1, 2, 4, 5), идентичный с таковым, полученным ранее, как выше сказано, Зелинским и Титовой.

Промежуточная фракция (циклогексадиенов с т. к. 84—85°) дала нам при окислении главным образом циклогексаэритрит с т. пл. 153—154°, получающийся при окислении низшей фракции циклогексадиена 1,3 с т. к. 80—81°.

Лаборатория органической химии
Московского государственного университета.

Поступило
21 XI 1934.

CHEMIE

ÜBER ZYKLOHEXADIENE

Von N. ZELINSKIJ, Mitglied der Akademie, J. DENISENKO und M. EVENTOVA

Aus dem, was in der Literatur über diese Kohlenwasserstoffe bisher erschienen ist, kann man sich keine klare Vorstellung über ihre Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen machen. Die Angaben verschiedener Autoren stimmen miteinander nicht überein und sind leider nicht imstande, uns vollen Aufschluss darüber zu geben, inwiefern man ein jedes der isomeren Zyklohexadiene als individuelles Präparat betrachten darf. Die Tabelle (SS. 314—315), in welcher die Konstanten dieser Kohlenwasserstoffe zusammengefasst sind, bestätigt die Richtigkeit des Gesagten.

Aus den soeben angeführten Eigenschaften der beiden Zyklohexadiene geht hervor, dass sie keine völlig homogen Körper darstellen, sondern ein jedes von ihnen ein Gemisch bildet, in welchem bald die eine, bald die andere Isomere vorherrscht. Die chemische Beschaffenheit der Zyklohexadiene ist jedoch von derartigem Interesse, dass wir uns entschlossen haben an die vorliegende Untersuchung heranzutreten, um auf diesem Wege einen tieferen Einblick in die Isomerie dieser Kohlenwasserstoffe zu gewinnen.

Darstellung der Zyklohexadiene

Als Ausgangspunkt diente uns das cis-Chinit-Präparat der Firma Poulenc-Frères. In einem mit gutem Kühler versehenen Würtz'schen Kolben wurde 1 Mol. cis-Chinit gebracht, dem man 2 Mol. fein zerriebenes und frisch geglühtes Magnesiumsulfat hinzufügte. Im Verlauf der Reaktion, die 4—5 Stunden dauerte und bei welcher der Kolben im Luftbade allmählich erwärmt wurde, leitete man einen Kohlensäurestrom zu, der den entstandenen Kohlenwasserstoff in eine gut gekühlte Vorlage abführte. Das Reaktionsprodukt wurde hierauf vom Wasser getrennt, mit einer schwachen Alkalilösung gewaschen und über geschmolzener Pottasche getrocknet. Durch Abspaltung des Wassers, die wir unter diesen Bedingungen ausführten, gelang es uns die Ausbeute der Zyklohexadiene (Siedepunkt 80—89°) auf 65% gegen die von uns früher erreichten 40% zu bringen.

Bei Einwirkung von frisch geschmolzenem und zerkleinertem Kaliumbisulfat erzielten wir die gleiche Ausbeute, jedoch mit dem Unterschied, dass im erhaltenen Gemisch der beiden Zyklohexadiene die hochsiedende Isomere in diesem Falle vorherrschte, und zwar in einem Verhältnis von etwa 2:1, während bei Anwendung von Magnesiumsulfat die niedrigsiedende Isomere (1,3-Zyklohexadien) den weitaus grössten Teil ausmachte, und zwar im Verhältnis von 8:1. Die Darstellung dieser Kohlenwasserstoffe wurde mehrere Male unter den erwähnten Bedingungen vorgenommen und führte stets zu den oben angeführten Resultaten. Neben den Zyklohexadienen bildet sich stets in geringen Mengen das Δ3-Zyklohexanol (1), durch dessen Dehydrierung man die Ausbeute der Zyklohexadiene noch etwas erhöhen kann. Wir gelangten auf diese Weise zu einigen Hundert Gramm Kohlenwasserstoff, die wir einer sorgfältigen Fraktionierung über Bariumoxyd in einem 1 m langen Dephlegmator (Vigreux) unterwarfen.

Die erste Fraktionierung der durch Einwirkung von Kaliumbisulfat auf Chinit erhaltenen Zyklohexadiene (125 g), deren Siedepunkte bei 752 mm Druck zwischen 80° und 89° lagen, ergab folgende Resultate:

Fraktion	Siedepunkt	g
I	80—82°	25
II	82—86°	36
III	86—88°	53

Die erste Fraktionierung der durch Einwirkung von Magnesiumsulfat auf Chinit erhaltenen Zyklohexadiene (460 g), deren Siedepunkte bei 752 mm Druck zwischen 80 und 89° lagen, ergab folgende Resultate:

Fraktion	Siedepunkt	g
I	80—82°	333
II	82—86°	80
III	86—88°	42.5

Die bei gleichen Temperaturintervallen siedenden Kohlenwasserstoffe wurden zusammengebracht und bei einem Druck von 752 mm einer nochmaligen Fraktionierung unterworfen. Hierbei erhielt man folgende Fraktionen:

I	Fraktion bei	80 —81°	siedend	262 g
II	„	81 —82	„	63
III	„	82 —84	„	15
IV	„	84 —85	„	45
V	„	85 —87	„	34
VI	„	87 —88	„	43
VII	„	88 —88.8	„	12
VIII	„	88.8—89.2	„	24

Werden 1—2 Tropfen der bei 80—81° siedenden Zyklohexadienfraktion mit einer Alkohol-Schwefelsäuremischung geschüttelt, so tritt eine tiefe dunkelblauviolette Färbung ein (Baeyer'sche Reaktion). Die bei 88—88.8° siedende Fraktion dagegen liefert eine violett-kirschrote Färbung.

Wie oben ausgeführt wurde, erhält man — je nach dem Agens, welches zur Hydrierung diente — als vorherrschenden Kohlenwasserstoff bald das bei 80—82°, bald das bei 87—89° siedende Zyklohexadien. Die letzten drei höhersiedenden Fraktionen wurden nochmals fraktioniert, wobei es gelang den bei 88.8—89.2° siedenden Kohlenwasserstoff zu isolieren. Ein Tropfen des bei 80—81° siedenden 1,3-Zyklohexadiens, in eine kalte Alkohol-Schwefelsäuremischung gebracht, verursacht allmählich eine dunkelblauviolette Färbung. Unter den gleichen Bedingungen ruft die höhersiedende Isomere (Siedepunkt 88—89°) — das 1,4-Zyklohexadien — eine Rosafärbung mit schwach blau-violetter Tönung hervor. Solches Verhalten lässt darauf schliessen, dass wir es in dem höhersiedenden Kohlenwasserstoff mit dem 1,4-Zyklohexadien im individuellen Zustande zu tun haben. Dies wird sowohl durch die physikalischen Eigenschaften als auch durch die Analyse bestätigt. Als festgestellt können gegenwärtig folgende Eigenschaften der 1,3- und 1,4-Zyklohexadiene, die sich durch Färbungsreaktionen scharf voneinander unterscheiden, gelten.

Zyklohexadien (1,3), Siedepunkt 80.5—80.7° (752 mm)

$$d_4^{20} = 0.8451; \quad d_4^{16} = 0.8489; \quad n_D^{16} = 1.4766$$

M_D wurde zu 26.64 ermittelt, berechnet für C_6H_8 (2 F) = 26.77

Zyklohexadien (1,4), Siedepunkt 88.4—89.4° (769 mm); wurde im Verlauf von 18 Tagen in Gegenwart von wasserfreiem Natriumsulfat aufbewahrt

$$d_4^{20} = 0.8569; \quad n_D^{15.2} = 1.4781$$

Analyse: Einwage 0.1467 g: 0.4830 CO_2, 0.1277 H_2O

C_6H_8 berechnet C = 89.93% H = 10.07%

gefunden C = 89.86 H = 9.74

Das gleiche Präparat, bei 88.8—89.2° siedend (758 mm)

$$d_4^{17} = 0.8592; \quad n_D^{17} = 1.4748$$

$$M_D = 26.23$$

Das gleiche Zyklohexadien (1,4) durch Maleïnsäureanhydrid von 1,3-Zyklohexadienspuren befreit

$$d_4^{20} = 0.8549; \quad d_4^{19} = 0.8559; \quad n_D^{19} = 1.4745$$

$$M_D = 26.31$$

Zyklohexadien (Gemenge von Isomeren), Siedepunkt 85—87° (744 mm)

$$d_4^{20} = 0.8528; \quad d_4^{17} = 0.8543; \quad n_D^{17} = 1.4741$$

$$M_D = 26.34$$

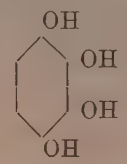
Uns interessierte noch die Frage über die Bildung von Zyklohexaerythrit, welches dem von Zelinskij und Titova [14]) gewonnen isomer wäre. Letztere gingen hierbei von dem bei 85—87° siedenden Zyklohexadien aus, in welchem das 1,4-Zyklohexadien vorherrschend war.

Oxydation des 1,3-Zyklohexadiens

Dieser bei 80—81° siedende Kohlenwasserstoff wurde unter Luftsauerstoffabschluss in einem geschlossenen Gefäss oxydiert, das mit einem schnell drehbaren Rührer versehen war. Durch einen Tropftrichter wurde eine 1%-ige Permanganatlösung (2 Atome Sauerstoff auf 1 Mol. Zyklohexadien) hinzugegossen, und zwar mit einer solchen Geschwindigkeit, dass die Temperatur im Gefäss nicht über 0° stieg, was durch ein in das Reaktionsgemisch gesenktes Thermometer kontrolliert wurde. Nach Ablauf der Reaktion und Entfernung des Manganperoxyds lieferte die wässerige Lösung der Oxydationsprodukte bei der Destillation mit Wasserdampf keine flüchtigen Stoffe. Sie wurde mit Kohlensäure gesättigt, im Wasserbade bis auf ein geringes Volumen eingedampft und sodann mit absolutem Alkohol extrahiert. Nach Entfernung des Alkohols bleibt eine syrupartige Flüssigkeit zurück, die sich allmählich zu einer festen, schwach gefärbten Masse kristallisiert. Durch wiederholte Kristallisation aus absolutem Alkohol erhielt man einen bei 153—154° schmelzenden farblosen, kristallinischen Stoff von süsslichem Geschmack; dieser Stoff löste sich in Wasser sehr leicht, in Alkohol weniger und in Äther gar nicht.

Analyse: Einwage — 0.1112 g; 0.1978 g CO_2 und 0.0809 g H_2O
$C_6H_{12}O_4$ berechnet: C — 48.65% und H — 8.11%
gefunden: C — 48.39 " und H — 8.14

Somit erhielten wir bei der Oxydation von 1,3-Zyklohexadien das Zyklohexaerythrit von nachstehender Struktur



Oxydiert man unter den gleichen Bedingungen die bei 86—89° siedende Fraktion, so erhält man in sehr geringen Mengen das Zyklohexaerythrit als nadelförmige Kristalle; aus Wasser umkristallisiert, schmelzen sie bei 239—240° und bilden dann das in Wasser schwächer lösliche Zyklohexaerythrit (1, 2, 4, 5), welches mit dem früher von Zelinskij und Titova gewonnenen identisch ist.

Laboratorium für organische
Chemie der Universität Moskau.

Eingegangen
d. 21. XI. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] A., 278, 94 (1893). [2] Soc., 73, 945 (1898). [3] ЖРФХО, 30, 175 (1898) [4] Soc., 85, 1403 (1904). [5] A., 328, 88 (1903). [6] ЖРФХО, 40, 1388 (1908). [7] Ber., 42, 693 (1909). [8] Ber., 45, 1464 (1912). [9] Ber., 43, 3383 (1910). [10] Ber., 45, 809 (1912). [11] C. Bl., 1924$_I$, 1368. [12] C. Bl., 1930$_{II}$, 2259. [13] Ber., 64, 1899 (1931). [14] Ber., 64, 1399 (1931).

ГЕОХИМИЯ

Ю. М. ТОЛМАЧЕВ и А. Н. ФИЛИППОВ

О НАХОЖДЕНИИ РЕДКИХ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ В АМАЗОНИТАХ

(Представлено академиком Д. С. Рождественским 26 XII 1934)

Амазонским камнем, или амазонитом, называется, как известно, разновидность микроклина сине-зеленого цвета, найденная впервые в районе реки Амазонки. На присутствие в амазонитах значительного количества рубидия обратил впервые внимание В. И. Вернадский (1): исследуя образец этого минерала из района Ильменских гор, он нашел в нем 3.12% Rb_2O. Настоящая работа была поставлена с целью произвести анализ амазонитов различных месторождений на редкие щелочные металлы; представлялось интересным выяснить, является ли наличие заметных концентраций рубидия характерной особенностью амазонитов Ильменских гор, или же оно имеет место для амазонитов различных месторождений. Всего было нами исследовано 9 образцов амазонского камня: 4 из них были из района Ильменских гор, 2 — из Хибинских тундр, 2 — из Колорадо (Северная Америка) и один с о. Мадагаскара.

Количественные определения рубидия, а также лития и цезия, производились спектрографическим путем. Выделенные по способу Л. Смита из минералов хлориды щелочных металлов исследовались посредством метода спектров сравнения; при этом использовались главным образом первые дублеты главных серий этих элементов. Более подробно применявшаяся методика описана в статье одного из нас, напечатанной в ДАН(2). Помимо редких щелочных металлов, в амазонитах количественно были определены также элементы Be и Ga. В этом случае навески минералов в 1 г каждая обрабатывались H_2F_2 до удаления кремния, после чего остатки переводились в раствор и сравнивались спектрографически со стандартными растворами. Последние подгонялись по содержанию Na, K и Al к составу испытуемых растворов и содержали, кроме названных элементов, еще Be и Ga в известных концентрациях. Съемка спектров производилась на большом кварцевом спектрографе Шмидта и Хенша и на стеклянном фирмы Цейсса. Для возбуждения спектров применялась преимущественно конденсированная искра. Результаты анализов сведены в таблице (стр. 322).

Как видно из приведенной таблицы, наиболее богатыми рубидием являются ильменские амазониты. Они содержат в среднем свыше 1% Rb и кроме того в среднем 0.05% Cs; отношение Rb : Cs для них приблизительно равно 20 : 1. Далее идет амазонит с о. Мадагаскара, содержащий 1% Rb; отношение Rb : Cs для него $\cong$ 6 : 1. Наиболее бедными в отношении Rb и Cs являются амазониты Хибинских тундр и Колорадо. Что касается лития, то, за исключением мадагаскарского амазонита, содержащего по нашим анализам 0.15% Li, во всех остальных образцах концентрация его меньше 0.001%.

Несмотря на то, что содержание Rb в амазонитах колеблется довольно сильно в зависимости от их месторождения, тем не менее из полученных результатов следует, что наличие заметных концентраций этого элемента является характерной особенностью названного микроклина. Поэтому, как уже указал В. И. Вернадский(1), состав амазонитов следует выражать формулой:

$$(K, Rb, Na)_2Al_2Si_6O_{16}.$$

№№	Месторождение	Количество в %			
		Rb	Cs	Ga	Be
1	Урал, Ильменский заповедник . . . . . Ural, Ilmenski park	0.7	0.03	0.005	0.003
2	Урал, Гора Косая . . . . . Ural, Kosaya Mountain	0.9	0.07	0.007	0.005
3	Урал, Ильменские горы . . . . . Ural, Ilmenski Mountains	1.3	0.05	0.004	0.005
4	Урал, Ильменские горы . . . . . Ural, Ilmenski Mountains	2.0	0.09	0.007	0.008
5	Хибинские тундры, Иньпорр . . . . . Khibiny, Inporr	0.2	0.004	0.003	0.01
6	Хибинские тундры, Кедикауйв . . . . . Khibiny, Kedikauyv	0.25	0.01	0.004	0.015
7	Сев. Америка, Колорадо . . . . . N. America, Colorado	0.2	0.005	0.004	0.002
8	Сев. Америка, Колорадо . . . . . N. America, Colorado	0.1	0.003	0.006	0.006
9	Мадагаскар . . . . . Madagascar	1.0	0.15	0.002	0.0007

В связи с обнаружением в некоторых амазонитах заметных количеств Rb, два наиболее богатых из них были проанализированы на Sr. Последний элемент является возможным продуктом радиоактивного распада Rb. Если принять время полураспада Rb равным $4.3.10^{11}$ лет ([3]), а время существования минералов Ильменского месторождения равным 2.10^8 лет [Холмс и Ловсен ([4])], то в образцах №№ 3 и 4 можно ожидать соответственно 0.0003 и 0.0005% Sr, образовавшегося за счет радиоактивного распада рубидия. Количественные определения Sr были также произведены спектроскопическим путем. После разложения минералов H_2F_2 дальнейшее исследование производилось по методу спектров сравнения. При анализах были приняты самые тщательные меры для предохранения исследовавшихся проб от загрязнения стронцием извне; были проконтролированы на отсутствие Sr все применявшиеся реактивы и вода. Анализы, проведенные с несколькими параллельным пробами, дали следующие результаты: образец № 3 содержит 0.0015% Sr, а образец № 4 — 0.002%.

Таким образом, количество Sr в этих образцах значительно превышает то, которое мог дать радиоактивный распад рубидия. Если совместно с Хевеши ([5]) считать, что радиоактивным является изотоп Rb_{87}, то в стронции, содержащемся в некоторых образцах амазонитов Ильменских гор, концентрация изотопа Sr_{87} должна достигать 30%. В обычном же стронции концентрация Sr_{87}, по данным Астона ([6]), равна всего лишь 6.6%. Весьма значительная разница в концентрации Sr_{87} позволяет надеяться обнаружить ее современными физическими методами, например, путем исследования сверхтонкого строения спектральных линий SrII 4077.7 и 4215.5 Å, которое недавно было обнаружено Шюлером([7]).

Следует заметить, что, согласно данным Нолля ([8]), содержание Sr в полевых шпатах обычно довольно высокое: сотые и даже десятые доли процента. Отношение Sr : Ca, по данным Нолля, также довольно высокое: $^1/_2$—$^1/_{50}$. Для образца № 4 мы это отношение нашли равным $^1/_{100}$.

Если принять во внимание, что Y, могущий также быть продуктом радиоактивного распада Rb, не был нами обнаружен в образцах №№ 3 и 4 (чувствительность определений Y — 0.001%), то следует считать, что амазониты Ильменского месторождения являются весьма удобным объектом для изучения вопроса о радиоактивных превращениях Rb. Амазониты Мадагаскара, повидимому, менее пригодны для этой цели: так, в исследовавшемся образце № 9 концентрация Sr достигает 0.01%.

В заключение необходимо сказать несколько слов по поводу окраски амазонитов. В литературе неоднократно указывалось, что сине-зеленый цвет амазонитов обусловлен присутствием окиси меди([3]). Нашими спектрографическими анализами мы не могли подтвердить это объяснение. Во всех случаях содержание меди не превышало 0.001%.

Интересно отметить, что во всех образцах амазонитов были обнаружены следы Pb. Связи между количеством этого элемента и окраской найдено не было.

Мы считаем своим долгом выразить глубокую признательность проф. В. И. Крыжановскому за любезное предоставление образцов амазонского камня.

Государственный оптический институт.
Лаборатория спектрального анализа.
Ленинград.

Поступило
26 XII 1934.

GEOCHEMISTRY

ON THE PRESENCE OF RARE ALKALINE METALS IN AMAZONITES

By A. FILIPPOV and J. TOLMAČEV

(*Communicated by D. Roždestvenskij, Member of the Academy, 26. XII. 1934*)

As is known, amazonite is a bluish-green variety of microcline discovered in the region of the Amazon river. The presence of large amounts of rubidium in amazonites was noted for the first time by Vernadskij ([1]), who found 3.12% of Rb_2O in an amazonite sample from Ilmenski Mountains in the Urals. The purpose of the present work was to test amazonites from different deposits for the presence of rare alkaline metals. It seemed interesting to find out whether the presence of noticeable amounts of rubidium is peculiar to the Ilmenski amazonites only, or whether Rb can be found in amazonites from other deposits also.

We have analysed in all nine samples of amazonite: 4 from the region of Ilmenski Mountains, 2 from the Khibiny, 2 from Colorado (North America), and 1 from Madagascar.

Quantitative determinations of rubidium, as well as lithium and caesium, were made spectrographically. Chlorides of alkaline metals isolated from the minerals by L. Smith's method were examined with the aid of comparison spectra. We used chiefly the first doublets of the principal series of these elements. A more detailed description ot the method used was given by one of the writers in Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS ([2]). Besides the rare alkaline metals, quantitative determinations of Be and Ga were made. One gram of the mineral was subjected in this case to the action of H_2F_2 until all silicon was removed. The rest was dissolved and compared spectrographically with standard solutions.

The amount of K, Na, and Al in the latter corresponded to the chemical composition of the solutions analysed, which contained known quantities of Be and Ga. Spectrograms were taken on a large Schmidt and Haensch quartz spectrograph and a Zeiss glass spectrograph. A condensed spark was used as a light source.

The results of the analysis are given in the table (p. 322).

The table shows that the Ilmenski amazonites contain the largest quantities of rubidium. Their average Rb content exceeds 1%; moreover, they have on an average 0.05% of caesium. The ratio Rb/Cs for them is thus ~ 20 : 1. The second place is occupied by the Madagascar amazonite with 1% Rb and the ratio Rb/Cs ≅ 6 : 1. The smallest quantities of Rb and Cs were found in the Khibiny and Colorado amazonites. As to lithium, its content in the Madagascar amazonite, as shown by our analysis, was 0.15%. Its concentration in all other samples was less than 0.001%.

Although the Rb content in amazonites varies considerably in different deposits, the results obtained show that the presence of noticeable amounts of Rb is a characteristic feature of this microcline. Therefore, the chemical composition of amazonites should be expressed, as Vernadski has pointed out (1), by the following formula:

$$(K, Rb, Na)_2Al_2Si_6O_{16}.$$

Since in some amazonites there were found noticeable amounts of rubidium, the two richest samples were tested for the presence of strontium. The presence of this element may be due to the radioactive disintegration of Rb. If we assume with Mühlhoff (3) that the half period of Rb desintegration is $4.3 \cdot 10^{11}$ years and the age of the Ilmenski Mountains minerals $2 \cdot 10^8$ years [Holmes and Lawson (4)], the amount of Sr formed by radioactive Rb disintegration in samples 3 and 4 would be 0.0003 and 0.0005% respectively. Quantitative determinations of Sr were also made spectrographically. After the treatment of the minerals by H_2F_2 they were investigated by the comparison spectra method. Utmost care was taken to prevent contamination of the analysed samples by foreign Sr during the analysis; all chemicals and water used were tested for the absence of Sr. Several parallel analyses gave the following results: the sample 3 contained 0.0015% Sr, the sample 4—0.002%.

Thus, the quantity of Sr in these samples considerably exceeds the quantity that could have been produced by Rb radioactive disintegration. If we suppose with Hevešy (5) that only the isotope Rb_{87} is radioactive, then we can expect the concentration of the isotope Sr_{87} in some samples of Ilmenski amazonite to reach 30%. Now, Aston (6) has shown that ordinary strontium contains only 6.6% Sr_{87}. Such a considerable difference in Sr_{87} concentration will perhaps make it possible to detect it by modern physical methods, for example, by the examination of the hyperfine structure of the lines SrII 4077.7 and 4215.5 Å investigated recently by Schüler (7).

It is to be noted that, according to Noll's data (8), the concentration of Sr in feldspars is ordinarily rather high: hundredths and tenths per cent. The ratio Sr/Ca, according to Noll, is also rather high: $^1/_2$—$^1/_{50}$. We have found that for sample 4 this ratio was $^1/_{100}$.

Since Y, which can also originate from Rb radioactive disintegration, has not been found in samples 3 and 4 (the sensitivity of determinations has 0.001% Y), it seems that the Ilmenski amazonites are very convenient for the study of Rb radioactive transformations. The Madagascar amazo-

nites seem to be less suitable for this purpose: thus, the amount of Sr in sample 9 reaches 0.01%. In conclusion we should like to say a few words about the origin of the colour of amazonites. It has been pointed out several times that their bluish-green colour is due to the presence of copper oxide. Our spectrographical analysis does not support this point of view. Copper content in all cases did not exceed 0.001%.

It is interesting to note that traces of Pb were detected in all amazonite samples. No connexion between its amount and the colour has been discovered.

We should like to express our best thanks to Prof. V. Kryžanovskij, who has kindly placed at our disposal the amazonite samples.

State Optical Institute,
Laboratory of Spectral Analysis.
Leningrad.

Received
26. XII. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] V. Vernadski. Bull. Soc. Miner. France, **36**, 258, 1913. [2] Ю. М. Толмачев. ДАН, I, № 8, 464, 1934. J. Tolmačev. C. R. Acad. Sci. URSS, I, No 8, 464, 1934. [3] W. Mühlhoff. Ann. d. Phys., **7**, 207, 1930. [4] A. Holmes and R. W. Lawson. Nature, **125**, 48, 1930. [5] G. Heveši. Nature, **120**, 838, 1927. [6] F. W. Aston. Proc. Roy. Soc., **134**, 571, 1932. [7] H. Schüler und H. Westmeyer. Naturwiss., **21**, 561, 1933. [8] W. Noll. Chemie d. Erde, **8**, 507, 1934. [9] Max Bauer. Edelsteinkunde. Leipzig, 1909, p. 526.

ГЕНЕТИКА

Д. КОСТОВ и И. А. АКСАМИТНАЯ*

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛИПЛОИДНЫХ РАСТЕНИЙ

VII. ХИМИЧЕСКИЕ АНАЛИЗЫ F_1-ГИБРИДОВ И ИХ АМФИДИПЛОИДОВ

(*Представлено академиком Н. И. Вавиловым 28 XII 1934*)

При сравнительном цитологическом, гистологическом, генетическом и морфологическом исследованиях F_1 видовых гибридов *Nicotiana* и их амфидиплоидов были найдены различия, которые дали мысль провести химический анализ F_1-гибридов и их амфидиплоидов.

Материал собирался в начале периода цветения и в течение этого периода. Для анализа бралась средняя проба листьев со всего растения F_1-гибридов (*Nicotiana rustica* L. var. *humilis* syn. *pumila* × *N. paniculata* L. form *cordifolia*) и (*N. glauca* Grah. × *N. Langsdorffii*) и их амфидиплоидов [1]. Большинство определений производилось в сыром материале; в сухом определялись зола, лимонная кислота по методу Пятницкого и клетчатка по видоизмененному методу Геннеберга-Штомана. Общее количество азота определялось методом Кьельдаля, белковый азот—по методу Барнштейна, а общее количество белка вычислялось путем умножения последней цифры на 6.25. Содержание углеводов определялось в спиртовой вытяжке из свежего материала. После удаления спирта и доведения до определенного объема дестиллированной водой определялась общая

* Костов — генетика, Аксамитная — химия.

F_1-гибридов и амфидиплоидов F_1-hybrids and amphidiploids	Влажность Water content	Сырая зола Ashes	Общий азот Total nitrogen content	Белковый азот Nitrogen of the proteins	Белок Proteins	Общая редуцирующая способность на глюкозу The total reduc.
1	2	3	4	5	6	7
F_1 *N. rustica* × *N. paniculata* . . .	88.66	12.61	6.01	5.61	35.06	7.52
N. rupa (amphidiploid)	91.24	23.20	2.74	2.48	15.90	9.46
F_1 *N. glauca* × *N. Langsdorffii* . .	89.26	16.97	5.16	5.09	31.81	5.61
N. Vaviloviana (amphidiploid) . .	90.88	17.72	5.31	4.50	28.12	7.38

редуцирующая способность водной вытяжки (углеводы-полифенолы, см. таблицу 7); в остальном фильтрате производилось осаждение основным уксуснокислым свинцом полифенолов, белков и пр. несахаров. В фильтрате было определено содержание углеводов (8). Разница между этими цифрами (7, 8) дает содержание полифенолов (10), выраженное в глюкозе. Отдельная порция фильтрата гидролизовалась соляной кислотой и определялось содержание углеводов тем же методом (9). Гидролиз крахмала производился диастазом, гидролиз гемицеллюлоз — двухпроцентной соляной кислотой, и образовавшаяся глюкоза в обоих случаях определялась по Бертрану и умножалась на коэффициент 0.9. Никотин определялся колориметрическим методом Каширина. Все данные химического анализа, приведенные в таблице, являются средними из двух параллельных проб и выражены в процентах на абсолютно-сухой вес. Материал, F_1 (*N. rustica* × *N. paniculata*) и их амфидиплоид, был собран и проанализирован 7 VIII 1934 г., тогда как F_1 (*N. glauca* × *N. Langsdorffii*) и их амфидиплоид — 7 IX 1934 г.

Сравнительных химических анализов гибридов F_1 и их амфидиплоидов никогда еще не производилось; во всяком случае на это нет никаких указаний в литературе. Нам известно только исследование содержания витамина С в диплоидах и триплоидах яблок, произведенное Crane и Zilva (1931—1932 г.) и тоже витамина С в диплоидах и тетраплоидах томатов, произведенное Sansome и Zilva ([3, 2]). Однако это исследование имело дело с автополиплоидными растениями, хотя мы не знаем точно, какой вид триплоидии мы имеем в яблоках. Следует упомянуть, что в обоих случаях витамина С было больше в полиплоидах, чем в диплоидах.

Переходя к изложению полученных нами результатов анализа приведем некоторую цитогенетическую характеристику исследуемых растений. Необходимо указать, что хромозомы родительских форм конъюгируют в F_1-гибридах и часто образуют в амфидиплоидах тетравалентные хромозомы. Это явление иногда вызывает изменение числа хромозом и нарушение константности генетического аппарата амфидиплоидов ([1]).

до гидролиза Carbohydrates before hydrolysis	Углеводы после гидролиза Carbohydrates after hydrolysis	Полифенолы на глюкозу Polyphenols	Полифенольное число Coefficient	Крахмал Starch	Гемицеллюлоза Hemicellulose	Сырая клетчатка Cellulose	Никотин Nicotine (alkaloid)	Лимонная кислота Citric acid
8	9	10	11	12	13	14	15	16
7.16	7.09	0.36	4.78	3.92	4.54	6.57	Следы Traces	1.59
8.47	8.45	0.99	10.46	4.79	0.50	5.88	0.47	—
2.04	1.90	3.57	63.63	1.33	1.18	8.20	Нет None	3.02
5.62	6.01	1.76	23.84	2.92	1.04	7.46	0.11	0.59

Мы исследовали амфидиплоиды *rustica* × *paniculata* (короче говоря *N. rupa*), которые имели только 72 хромозомы, и *glauca* × *Langsdorffii* (короче говоря *N. Vaviloviana*) с 42 хромозомами. Растения, хотя они и имели нормальное число хромозом, слегка отличались друг от друга морфологически, и это явление, повидимому, объясняется перекрестом между хромозомами родительских видов, F_1-гибридов и амфидиплоидов. *N. rupa* представляет четвертое поколение амфидиплоида, а *N. Vaviloviana* — второе. Следует также отметить, что амфидиплоиды имели бо̀льшие клетки, чем F_1-гибриды (1).

Химический анализ показал, что амфидиплоиды содержат больше золы и воды и меньше клетчатки и гемицеллюлоз, чем F_1-гибриды, это согласуется с результатами, полученными цитологически. Полученное нами у амфидиплоидов большее содержание золы и воды и меньшее клетчатки и гемицеллюлоз, по всей вероятности, должно быть поставлено в связь с наличием бо̀льших по размерам клеток у амфидиплоидов, последнее дает нам цитологическое исследование. Эта связь особенно резко наблюдается у амфидиплоида *N. rupa*, где, например, процент золы возрос почти в два раза, а процент гемицеллюлоз уменьшился в восемь раз. У *N. Vaviloviana* это не является таким очевидным; имея для воды и клетчатки примерно такие же отношения, как у *N. rupa*, мы имеем в то же время цифры золы гемицеллюлоз почти одинаковые.

В отношении азота в белках мы встречаемся с исключительно интересным случаем у *N. rupa*; количество общего азота и белка уменьшается у амфидиплоида в два раза; такое уменьшение белковых веществ имеет большое теоретическое значение. Необходимо дальнейшее исследование этого вопроса, чтобы иметь возможность сделать не только теоретические, но и определенные практические выводы. В амфидиплоидах, по сравнению с F_1-гибридами, мы наблюдаем в обоих случаях увеличение как общей редуцирующей способности, так и углеводов до гидролиза и крахмала. В настоящее время, однако, мы затрудняемся объяснить это увеличение, необходимы дальнейшие исследования.

Имея в гибридах в одном случае следы, а в другом — полное отсутствие никотина (алкалоида), мы наблюдаем в обоих исследованиях появление

его в амфидиплоидах. Сказать определенно, какой алкалоид имеет место в F_1 и амфидиплоидах, пока нельзя. О некоторых из родительских форм имеются данные в литературе, говорящие, что в них вообще не встречается никотин, а близкий к нему летучий с водяным паром алкалоид и другие неизвестные (3)

У амфидиплоида *N. Vaviloviana* по сравнению с F_1-гибридом процент лимонной кислоты уменьшился при одновременном увеличении процента никотина (алкалоида).

В настоящее время было бы преждевременно выводить определенные заключения относительно практического применения амфидиплоида, основываясь только на этом одном химическом анализе, но мы можем определенно утверждать что амфидиплоиды представляют совершенно новую систему с биохимической точки зрения и что мутационный процесс в амфидиплоидах протекает совершенно иначе, чем в видах компонентов. Это положение имеет большое значение при формообразовании и эволюции.

Институт генетики.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
28 XII 1934.

GENETICS

STUDIES ON POLYPLOID PLANTS

By D. KOSTOFF and I. AXAMITNAJA *

VII. CHEMICAL ANALYSIS OF F_1-HYBRIDS AND THEIR AMPHIDIPLOIDS

(*Communicated by N. Vavilov, Member of the Academy, 28. XII. 1934*)

In investigating the cytology, histology, genetics, and the morphological appearance of the F_1 species hybrids in *Nicotiana* in comparison to their amphidiploids, differences were found which suggested the idea of carrying out a chemical analysis of the F_1-hybrids and their amphidiploids.

For the analysis we used leaves from the whole plant of F_1 (*Nicotiana rustica* L. var. *humilis* syn. *pumila* × *N. paniculata* L. form *cordifolia*) and F_1 (*N. glauca* Grah. × *N. Langsdorffii*) hybrids and from their amphidiploids (1). The material was collected from the plants when they were at the beginning of the florescence period and during the florescence period.

Biochemical analysis of F_1-hybrids in comparison to that of their amphidiploids have not yet been carried out. At least the authors are not acquainted with such a literature. We know only the investigations on the vitamin C content in diploid and triploid apples carried out by Crane and Zilva (1931, 1932) and that on the vitamin C content in the diploid and tetraploid tomatoes carried out by Sansome and Zilva (2). This study deals, however, with autopolyploid plants, while in the apples we do not know exactly what kind of triploidy we have. It should be mentioned that in both cases the polyploids have a greater content of vitamin C than the diploid forms.

In order to interpret the data given in the table (pp. 326—327) we should mention here some cyto-genetical characteristics of the plants inves-

* Kostoff—genetics, Axamitnaja—chemistry.

tigated. It should be noted that the chromosomes of the parental forms conjugate in the F_1-hybrids and that tetravalent chromosomes are often formed in the amphidiploids. This phenomenon conditions occasionally disturbances in the chromosomal and in the genetical constancy of the amphidiploids (1). For the present study we used amphidiploids *rustica* × *paniculata* (shrtly called *Nicotiana rupa*) that had only 72 chromosomes and *glauca* × *Langsdorffii* amphidiploids (shortly called *Nicotiana Vaviloviana*) which had only 42 chromosomes. The plants, although having the normal chromosome number, differed slightly from each other morphologically, a phenomenon obviously due to crossing-over between the chromosomes of the parental species in the F_1-hybrids and in the amphidiploids. *N. rupa* represented a 4th generation amphidiploid, while *N. Vaviloviana* a second generation. It should be also mentioned here that the amphidiploids have larger cells than the F_1-hybrids (1).

The chemical analysis showed that the amphidiploids constain somewhat more water and ashes and less cellulose and hemicellulooe than the F_1-hybrids. This is in accordance with the results cytologically obtained. The amphidiploids contain more water and ashes and have less cellulose and hemicellulose, because they have larger cells.

It seems, however, difficult to explain at the present time the occurrence of a greater percentage of nitrogen and protein and a smaller percentage of carbohydrates and starch in the F_1-hybrids when compared with the amphidiploids. Further investigations may throw some light on these phenomena.

The data given in the table show a parallel change in the content of various chemicals in both cases from F_1-hybrids to their amphidiploids; the differences, however, are not the same. In *N. rupa*, for example, ashes were found twice as much as in the F_1-hybrids, while the difference between the content of ashes in *N. Vaviloviana* and F_1-hybrids *glauca* × *Langsdorffii*, is insignificant.

At the present time it seems premature to draw definite conclusions concerning the practical application of the amphidiploids in general on the basis of this chemical analysis, but we can definitely state here that the amphidiploids represent a quite new system from the biochemical point of view and that the mutation processes in the amphidiploids should proceed in quite a different way than in the component species and in the F_1-hybrids. This statement is of great importance for the formogenesis, or, in general, for the evolution.

We are greatly indebted to Prof. N. Ivanov for suggestons and criticism throughout the biochemical analysis.

Institute of Genetics,
Academy of Sciences of the USSR.
Moscow.

Received
28. XII. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА—REFERENCES

1 D. Kostoff. On the Constancy of the Amphidiploids. 1934 (in press).— Д. Костов. ДАН, 1934, I, 4,217. D. Kostoff. C. R. Acad. Sci. URSS, 1934, I, 4, 220.
2 F. W. Sansome and S. S. Zilva. Bioch. Journ., 1934, 27, 1935.
3 А. А. Шмук. Сборн. работ по химии табака, 1934, вып. 5. A. Schmuck. Collection of Works on the Chemistry of Tobacco, 1934, No 5.

ГЕНЕТИКА

Д. КОСТОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛИПЛОИДНЫХ РАСТЕНИЙ

VIII. КОНЪЮГАЦИЯ ХРОМОСОМ В ГАПЛОИДАХ И ЕЕ ГЕНЕТИЧЕСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ

(*Представлено академиком Н. И. Вавиловым 28 XII 1934*)

Большинство исследователей, изучавших гаметогенезис гаплоидов, находили что две или несколько хромосом, соединяясь, образуют биваленты или поливаленты. Биваленты в гаплоидах разъединяются в течение ранней I анафазы таким же путем, каким биваленты диплоидов. Соединение хромосом в течение гаметогенезиса наблюдалось в гаплоидах энотеры (Davis и Kulkarni, Leliveld, Catcheside, Bleier и т. д.), пшеницы (Kihara и Katayama, Chizaki), табака (Clausen и Mann, Chipman и Goodspeed), кукурузы (McClintock) и т. д. С другой стороны, очень многие исследователи убеждены (a priori) что диплоиды, происшедшие от гаплоидов (гаплоиды часто образуют нормальные гаметы с полным набором хромосом) должны быть генетически „абсолютно“ гомозиготными.

Несколько лет назад мы имели гаплоида *Nicotiana Langsdorffii* ($n = 9$), в настоящее время мы имеем гаплоиды *Nicotiana sylvestris* ($n = 12$).

Растения, полученные от скрещивания гаплоида *N. Langsdorffii* с диплоидом, были менее однородны, чем потомство самоопыленного диплоида. Это показывает, что гаплоид образует менее однородные гаметы, чем диплоид. Этот факт заставил пересмотреть старые цитологические препараты гаплоида *N. Langsdorffii* и исследовать детально гаметогенезис у гаплоида *N. sylvestris*.

При этом мы обнаружили, что в обоих гаплоидах бивалентные хромосомы иногда встречаются в течение позднего диакинеза, метафазы и ранней анафазы (когда происходит расхождение). Иногда были найдены даже триваленты.

В гаплоиды *N. Langsdorffii* чаще наблюдался один бивалент, хотя два и три бивалента иногда также встречались. В гаплоиде *N. sylvestris* мы установили до 6 бивалентов.

Нам кажется, что конъюгация хромосом в гаплоидах, чаще всего, очень свободная (loose), и наиболее часто имеет место конечное соединение, как у гаплоидов *Triticum*, но наблюдалось несколько случаев, когда были образованы настоящие медиальные хиазмы в гаплоиде *N. Langsdorffii* в течение раннего диакинеза.

Сравнивая цитологические исследования в процессе гаметогенезиса у гаплоидов *Nicotiana*, у которых установили конъюгацию между „не гомологичными хромосомами“, с генетическими данными, показывающими, что потомство гаплоида отличается большим разнообразием, чем потомство диплоида, мы можем заключить, что в гаплоидах „перекрест“ встречается между „не гомологичными хромосомами“, поэтому „абсолютные“ гомозиготы не могут быть получены обязательно из гамет гаплоидов с полным набором хромосом.

Необходимо добавить, что мы нашли некоторое нарушение в мейотических процессах и образование около 10—20% абортивной пыльцы в крайних вариантах, полученных от скрещивания гаплоида *N. Langsdorffii* с диплоидом, в то время как нормальные диплоиды, при тех же окружающих условиях, имели нормальный мейозис и около 0.5—1% абор-

тивной пыльцы. Как крайние варианты, так и все остальные растения, полученные от скрещивания гаплоида с диплоидом, имели $2n = 18$.

Можно ожидать a priori, что диплоиды, полученные от гаплоидов путем удвоения хромосом в соме, должны быть „абсолютно" гомозиготными, но исследования Холлингсхэд в *Crepis* не дают больших надежд и в этом отношении.

Леливельд также сообщала о нарушении в гаметогенезисе диплоида энотеры, полученного из гаплоида.

Блейер думает, что это противоречит, отчасти, гипотезе Дарлингтона, но если мы рассмотрим „crossing-over" между гомологичными сегментами не гомологичных хромосом как причину разнородности потомства гаплоида и нарушения мейотических процессов, то тогда совершенно ясно, что это явление поддерживает гипотезу Дарлингтона.

Нахождение от 1 до 3 бивалентов в гаплоиде *N. Langsdorffii* ($n = 9$) и от 1 до 6 в гаплоиде *N. sylvestris* ($n = 12$) наводит на мысль, что возможно, что основное число хромосом у *Nicotiana* 6.

Тем не менее необходим более критический подход при решении таких принципиальных вопросов.

Институт генетики.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
28 XII 1934.

GENETICS

STUDIES ON POLYPLOID PLANTS

By D. KOSTOFF

VIII. CHROMOSOME CONJUGATION IN THE HAPLOIDS AND ITS GENETICAL SIGNIFICANCE

(Communicated by N. Vavilov, Member of the Academy, 28. XII. 1934)

Most of the investigators that studied the gametogenesis of the haploids found that two or several chromosomes associate, forming bivalents or polyvalents. Bivalents in the haploids disjoin during the early I-anaphase in the way any bivalent pair of the diploids does. Chromosome association during the gametogenesis was reported in *Oenothera* haploids (Davis and Kulkarni, Leliveld, Catcheside, Bleier, etc.), in *Triticum* haploids (Kihara and Katayama, Chizaki), in *Nicotiana* haploids (Clausen and Mann, Chipman and Goodspeed), in *Zea* haploids (McClintock), etc.

On the other hand, a great many investigators believe (*a priori*) that diploids produced from haploids (haploids often form normal gametes having the whole haploid chromosome set) should be genetically „absolute" homozygotes.

A few years ago we had a *Nicotiana Langsdorffii* ($n = 9$) haploid, and now we have a *Nicotiana sylvestris* ($n = 12$) haploid. From the seeds we produced in crossing the haploid *N. Langsdorffii* with the diploid one, plants were grown that were less uniform than the progenies of the diploids produced after selfing. This shows that the haploid forms gametes less uniform than the diploids. This fact suggested a reexamination of the old cytological preparations from *N. Langsdorffii* haploid and a detailed study of the gametogenesis of *N. sylvestris* we have now. In doing this we found that

in both haploids occasionally bivalent chromosomes occur during the late diakinesis, metaphase, and early anaphase (when the disjunction occurs). Sometimes even trivalents were found. One bivalent chromosome was most frequently observed in the haploid *N. Langsdorffii*, though two or three bivalents were occasionally observed too. In *N. sylvestris* we observed up to six bivalents.

We have the impression that in most of the cases the chromosome conjugation in the haploids is very loose, and most frequently a terminal association takes place, as that reported in *Triticum*, but a few cases were observed, where real interstitial chiasmata were formed in *N. Langsdorffii* haploid during the early diakinesis.

Correlating the cytological observations during the gametogenesis of the *Nicotiana* haploids, where conjugation between „non-homologous chromosomes" was found, with the genetical data which show that a greater variation takes place amongst the progenies of the haploid than amongst that of the diploids, we may conclude that crossing-over occurs between homologous segments of the non-homologous chromosomes in the haploids; therefore, „absolute" homozygotes cannot be ultimately produced from the gametes formed in the haploids having a whole haploid chromosome set. It should be added here that we found some disturbances in the meiotic processes and formation of about 10 to 20% of abortive pollen in the extreme variant produced from crossing the haploid *N. Langsdorffii* with the diploid, while the normal diploids growing at the same environmental conditions had normal meiosis and formed about 0.5 to 1% abortive pollen. The extreme variant, as well as all the plants produced from crossing the haploid with the diploid, had $2n = 18$.

One may expect *a priori* that the diploids produced from the haploids by doubling the chromosomes in the soma should be the „absolute" homozygotes, but Hollingshaed's observations in *Crepis* do not give much hope in this respect either.

Disturbances in the gametogenesis of a diploid *Oenothera* produced from a haploid one was also reported by Leliveld. Bleier thinks that this somewhat contradicts Darlington's hypothesis, but if we consider that crossing-over between homologous segments of the non-homologous chromosomes in the haploids is the cause for the variations in their progenies and for the disturbances in the meiotic processes, then it is clear that these phenomena support Darlington's hypothesis.

The occurrence of 1 to 3 bivalents in *N. Langsdorffii* ($n = 9$) haploid and 1 to 6 in *N. sylvestris* ($n = 12$) haploid suggested strongly that the basic chromosome number in *Nicotiana* is probably 6. Nevertheless, one should be more critical in deciding such important questions.

Institute of Genetics,
Academy of Sciences of the USSR.
Moscow.

Received
28. XII. 1934.

БИОЛОГИЯ

Б. Д. МОРОЗОВ

О ВЛИЯНИИ ГИПОСУЛЬФИТА НА РЕГЕНЕРАЦИЮ У АМФИБИЙ

(*Представлено академиком А. А. Рихтером 8 X 1934*)

Бинэ и Магру в своих работах, посвященных изучению значения серы для роста ([1, 2]), приводят интересные данные о влиянии гипосульфита на рост некоторых растений и на метаморфоз головастиков лягушек. Авторы решили испытать действие указанного вещества, исходя из тех соображений, что в период роста в организме повышается содержание глютатиона.

Авторы отмечают ускоренный рост семян *Lepidium sativum* на вате, смоченной раствором гипосульфита (всего лучше действуют слабые концентрации, например 1 : 1000). Так, через 8 дней длина контрольных растений была 45 мм, а подопытных 55 мм. Соответственно и вес подопытных проростков был больше.

Опыты с *Pisum sativum* и *Ervum lens* дали менее отчетливые результаты.

В опытах с головастиками *Rana temporaria* авторы получили ясное ускорение метаморфоза в случае, если животные находились в растворе гипосульфита 2 : 1000 или, еще лучше, 1 : 1000, по сравнению с головастиками, помещенными в речную воду (контроль). В последнем случае на 6-й день в контроле 2 из 8 имели ноги, тогда как в опыте все 8 головастиков уже имели конечности.

Опыты ставились на одной стадии метаморфоза — перед появлением задних ног.

Неясным является количество животных, с которыми авторы экспериментировали; насколько можно все же понять из описания, авторы ставили опыты на 8 головастиках, в то время как другие 8 из той же кладки яиц служили для контроля. Число опытов не приведено, в работе ([1]) описано лишь два опыта.

Для нас не совсем ясны теоретические обоснования описанных опытов. Значение глютатиона или группы SH очень велико для роста животных и растений и вообще для размножения клеток, однако неясно, какая связь может быть между глютатионом и гипосульфитом: гипосульфит при диссоциации в воде не дает ни группы H_2S, ни группы SH. Гипосульфит, очевидно, может быть использован живым организмом как источник серы, однако химическая сторона этого процесса пока ближе нами не изучена, в литературе также нет указаний, насколько нам известно, по этому вопросу. Указанные авторы на теоретической стороне также не останавливаются.

Описанные опыты имеют несомненно большое значение, так как демонстрируют возможность использования различными организмами необходимой для роста серы из такого простого неорганического соединения, каким является гипосульфит, наряду с тио-глюкозой, пара-тио-крезолом и др. органическими стимуляторами роста и размножения клеток, так подробно изученными Гамметом ([3, 4, 5, 6]) и его учениками.

Летом 1933 и весной 1934 гг. мы занялись подобной проверкой работ Бинэ и Магру над головастиками на значительном материале. В своих

опытах мы пользовались головастиками *Bufo bufo, Rana temporaria* и *Rana esculenta* на разных стадиях развития, каждый раз из одной кладки яиц. Помимо того были поставлены соответствующие опыты на личинках тритона (*Triton taeniatus*). Одновременно в каждый опыт шло 40—60 головастиков, половина этого количества содержалась в водопроводной воде, сменяемой через 2—3 дня, половина — в растворе гипосульфита (pro analysi) 2:1000 или 1:1000, сменяемого с такой же частотой, как и вода в контрольных опытах. Для опытов были использованы ранние стадии после вылупления — как только головастики начинали проявлять стремление есть, более поздние стадии, когда животные (*Rana temporaria*) достигали длины 1.5—2 см, наконец, дальнейшие стадии вплоть до появления задних ног. Нас не столько интересовало влияние гипосульфита на метаморфоз, сколько на регенерацию. Для изучения этого последнего вопроса из спинного плавника у контрольных и подопытных головастиков вырезывался треугольник, и при помощи окуляр-микрометра измерялась величина новообразований ткани, заполнявшей дефект. Эта методика уже описана нами ранее (7). У тритонов, помимо ранения спинного плавника, ампутировалась одна задняя нога. Во время опыта животные голодали. Это делалось для того, чтобы исключить неизбежную неравномерность в захватывании пищи отдельными животными.

Результаты наших опытов могут быть сведены к следующему.

Влияние гипосульфита на метаморфоз указанных видов лягушек весьма незначительно, например, на 4 контрольных головастика с законченным метаморфозом приходилось 5—6 головастиков подопытных, также закончивших превращение. Влияние гипосульфита на метаморфоз сказывается на стадии — перед появлением задних конечностей и после появления задних ног. На метаморфоз тритонов никакого влияния гипосульфита не установлено.

Что касается регенерации, то здесь влияние гипосульфита более ясное, однако не резкое. Гипосульфит в разведении 1:1000 и 2:1000 ускоряет регенерацию лишь на ранних стадиях развития головастиков, — всего яснее его действие на стадиях до появления задних ног.* Изученные виды лягушек относятся неодинаково к гипосульфиту: всего скорее идет регенерация под влиянием гипосульфита у *Rana temporaria*. Однако стимулирующее действие этого вещества на регенерацию выявляется с отчетливостью не в каждом опыте даже с этим видом.

Например, опыт № 5. 20 V 1934. Контроль — 30 головастиков *Rana temporaria*, опыт — то же количество животных в растворе гипосульфита 1:1000. Через 2 дня — M спинного плавника (контроль) = 7.45, M_1 (опыт) = 7.08. Еще через 2 дня — в контроле 11 головастиков закончили регенерацию, у 11 — регенерация почти закончена, у 3 — регенерация незначительна; опыт — 12 закончили регенерацию, у 8 регенерация почти закончена, у 5 — регенерация незначительна (остальные погибли). Наряду с такими „нулевыми" опытами можно привести протоколы опытов иного характера.

Опыт № 6. 24 V 1934 г. *Rana temporaria*. Опыт — 24 головастика в растворе гипосульфита 1:1000, контроль — 20 головастиков в водопроводной воде. Через 4 дня — M (контроль) = 5.8, M_1 (опыт) = 5.82. Но еще через 2 дня — в контроле закончили регенерацию 8.3% животных,

* В небольшом числе случаев под влиянием гипосульфита была отмечена ненормальная регенерация, заключавшаяся в том, что новообразованная ткань хвостового плавника не только заполняла весь дефект, но и выходила за нормальную границу плавника на 25—50 μ, образуя выпуклые выросты.

в опыте — 47.6%; еще через два дня — соответствующие цифры — 50% и 61.2%.

Аналогичных опытов было немало. Но приведенные данные с „нулевым" результатом говорят с несомненностью о том, что для изучения действия гипосульфита нужны большие цифры, т. е. другими словами его стимулирующее на регенерацию действие не резкое; это вещество не может быть включено в категорию хороших стимуляторов процессов реституции, к каким мы относим, например, эмбриональные экстракты и ткани (7). Гипосульфит оказывает свое действие не на все виды амфибий одинаково хорошо. Его действие проявляется лишь на ранних стадиях развития и по своей неравномерности действия может быть сравнено с таким содержащим серу (правда в виде сульфгидрильной группы) веществом, как пара-тио-крезол, который, являясь в одних случаях хорошим стимулятором регенерации (8), в других (при действии на других животных) — не оказывает этого влияния (9).

Отделение экспериментальной патологии
Медико-биологического института.
Москва.

Поступило
17 IX 1934.

BIOLOGIE

DE L'INFLUENCE DE L'HYPOSULFITE SUR LA RÉGÉNÉRATION CHEZ LES AMPHIBIES

Par B. MOROZOV

(*Présenté par A. Richter, de l'Académie, le 8. X. 1934*)

MM. L. Binet et J. Magrou dans leurs travaux consacrés à l'étude de l'influence du soufre sur la croissance (1, 2) communiquent des données intéressantes concernant l'influence de l'hyposulfite sur la croissance de certaines plantes et sur la métamorphose des têtards des grenouilles. Les auteurs ont entrepris d'éprouver l'action de la susdite substance en partant de la considération, que la quantité du glutathion dans l'organisme augmente pendant la période de la croissance.

Les auteurs signalent la croissance accélérée de graines de *Lepidium sativum* déposées sur de la ouate trempée dans une solution d'hyposulfite (c'est les concentrations faibles, par ex. 1 : 1000, qui agissent le mieux). Ainsi, après 8 jours la longueur des plantes témoins était de 45 mm et celle des plantes soumises aux expériences de 55 mm. Il en était de même pour le poids des germes.

Les expériences avec *Pisum sativum* et *Ervum lens* ont donné des résultats moins nets.

Dans leurs expériences sur les têtards de *Rana temporaria* les auteurs ont obtenu une accélération visible de la métamorphose pour les animaux mis dans une solution d'hyposulfite à 2 : 1000, ou, ce qui vaut mieux, de 1 : 1000 par rapport à ceux placés dans l'eau pure de rivière (contrôle). Dans le dernier cas 2 sur 8 des têtards témoins avaient des pattes au 6-me jour, tandis qu'à pareille époque tous les 8 têtards traités à l'hyposulfite avaient déjà des extrémités. Les expériences ont été faites pour le même stade de la métamorphose — pour le moment qui précède l'apparition des extrémités postérieures.

Le nombre des animaux, sur lesquels les auteurs ont expérimenté, n'est pas précisé, mais pour autant que nous pouvons nous en rendre compte d'après l'exposé, les auteurs ont fait leurs expériences sur 8 têtards, tandis que les 8 autres têtards de la même provenance servaient de témoins. Le nombre des expériences n'est pas indiqué; l'article (1) ne nous donne que la description de 2 expériences.

Les bases théoriques des expériences décrites ne nous apparaissent pas bien claires. L'importance du glutathion ou du groupe SH est très grande pour la croissance des plantes et des animaux et pour la prolifération des cellules en général, mais il n'est pas clair pourtant, quelle sorte de lien peut exister entre le glutathion et l'hyposulfite: la dissociation de l'hyposulfite dans l'eau ne donne ni le groupe H_2S, ni le groupe SH. Evidemment, l'hyposulfite pourrait servir pour l'organisme vivant comme source de soufre; mais le côté chimique de ce processus n'est pas encore étudié de plus près et la littérature ne fournit pas, à notre connaissance, d'indications sur cette question. Les dits savants non plus n'approfondissent point la question théorique.

Les expériences décrites ont sans aucun doute une grande importance, puisqu'elles démontrent la possibilité pour différents organismes d'extraire le soufre nécessaire à la croissance d'un composé inorganique aussi simple que l'est l'hyposulfite, concurremment avec le thio-glucose, le thio-p-crésol et autres stimulants organiques de la croissance et de la prolifération des cellules, si minutieusement étudiés par Hammett (3, 4, 5, 6) et ses élèves.

En été 1933 et au printemps 1934 nous avons entrepris de vérifier de façon détaillée les travaux de Binet et Magrou consacrés aux têtards sur un grand nombre de pièces. Dans nos expériences nous nous sommes servis de têtards de *Bufo bufo*, de *Rana temporaria* et de *Rana esculenta* à différents degrés de développement, mais pour chaque fois de la même provenance. Outre cela nous avons fait des expériences analogues sur des larves de triton (*Triton taeniatus*). Chaque expérience exigeait la mise à contribution de 40 à 60 têtards simultanément, dont une moitié était placée dans de l'eau d'aqueduc, renouvelée tous les 2—3 jours, l'autre moitié — dans une solution d'hyposulfite (*pro analysi*) de 2:1000 ou de 1:1000, qui était changée aux mêmes intervalles que l'eau des expériences de contrôle. Ce sont les premiers stades après l'éclosion qui ont servi aux expériences, dès que les têtards commençaient à manifester le besoin de nutrition, ensuite, les stades plus avancés, où les animaux (*Rana temporaria*) atteignaient une longueur de $1^1/_2$—2 cm, et enfin, des stades ultérieurs allant jusqu'à l'apparition des extrémités postérieures. Mais l'influence de l'hyposulfite sur la croissance nous intéressait moins que son influence sur la régénération. Pour étudier cette dernière question on pratiquait une excision triangulaire dans la nageoire dorsale de l'animal traité et de l'animal témoin; la dimension du tissu néoformé remplissant la plaie était mesurée au micromètre oculaire. Nous avons déjà eu l'occasion d'exposer cette méthode (7). Les tritons, en plus de l'opération subie par la nageoire dorsale, étaient amputés d'une patte postérieure. Pour toute la durée de l'expérience les animaux ne recevaient pas de nourriture. Cette dernière mesure a été prise dans le but d'exclure l'inégalité inévitable des portions ingérées par chaque animal individuellement.

Les résultats de nos expériences peuvent être résumés de la manière suivante.

L'influence de l'hyposulfite sur la métamorphose des espèces désignées de grenouilles est bien insignifiante, par exemple pour 4 têtards témoins

à métamorphoses complètes nous n'avons que 5—6 têtards soumis au traitement, ayant également achevé leur métamorphose. L'influence de l'hyposulfite sur la métamorphose se fait sentir au stade précédant l'apparition des extrémités postérieures et après l'apparition des pattes de derrière. Une influence de l'hyposulfite sur la métamorphose des tritons n'a pas été constatée.

Quant à la régénération, l'action de l'hyposulfite devient ici plus nette, sans prendre toutefois beaucoup de relief. L'hyposulfite pris dans des dilutions de 1:1000 et de 2:1000 n'accélère la régénération qu'aux premiers stades du développement des têtards, — son action est le plus efficace aux stades précédant l'apparition des pattes postérieures.* Les différentes espèces examinées de grenouilles réagissent différemment contre l'hyposulfite: la régénération sous l'influence de l'hyposulfite se fait le plus vite chez *Rana temporaria*. Toutefois, même chez cette espèce, l'action stimulante de l'hyposulfite sur la régénération ne se manifeste pas avec précision dans chaque expérience.

Prenons, par exemple, l'expérience № 5 du 20 V 1934. Témoins — 30 têtards de *Rana temporaria*; animaux traités — la même quantité dans la solution d'hyposulfite à 1:1000. Deux jours plus tard — M de la nageoire dorsale (contrôle) — 7.45; M_1 de la nageoire dorsale (traités) = 7.08. Encore deux jours plus tard — 11 têtards témoins ont achevé la régénération, onze autres — y touchent de près, les trois derniers ont une régénération insignifiante; parmi les têtards traités 12 ont achevé la régénération, 8 sont presque dans le même cas, 5 offrent une régénération insignifiante (les autres ont péri).

A côté de ces expériences „nulles" on peut citer des expériences, présentant un caractère tout différent.

Expérience № 6 du 24 V 1934 — *Rana temporaria*. Animaux traités — 24 têtards dans la solution d'hyposulfite à 1:1000; témoins — 20 têtards dans l'eau pure d'aqueduc. 4 jours plus tard — M (contrôle) = 5.8; M_1 (animaux traités) = 5.82; encore 2 jours après — 8.3 % des animaux témoins ont achevé la régénération; le nombre des animaux traités = 47.6 %; encore 2 jours plus tard — les chiffres correspondants sont 50 % et 61.2 %.

Nous avons eu des expériences analogues en assez grand nombre Mais les données citées aux résultats „nuls" nous montrent avec certitude, que l'étude de l'action de l'hyposulfite exige des chiffres beaucoup plus grands, autrement dit, son action stimulant la régénération n'est pas accentuée; cette substance ne peut pas figurer dans la catégorie des bons stimulants dans les processus de restitution, comme par exemple les extraits et les tissus embryonnaires (7). L'hyposulfite ne produit pas le même effet sur toutes les espèces d'amphibies. Son action ne se fait sentir que dans les premiers stades du développement et par l'inégalité de son action peut être comparée à une substance contenant du soufre (il est vrai sous l'aspect du groupe sulfhydrylique), telle que le thio-*p*-crésol, qui dans certains cas agit comme un bon stimulant de la régénération (8), sans exercer d'effet appréciable sur d'autres animaux (9).

Section de Pathologie expérimentale.
Institut médico-biologique. Moscou.

Manuscrit reçu
le 17. IX. 1934.

* Dans de rares cas on a pu signaler une régénération anormale, s'effectuant sous l'influence de l'hyposulfite, au cours de laquelle le tissu néoformé de la nageoire caudale, non seulement remplissait toute la plaie, mais dépassait les limites normales de la nageoire de 25—30 μ, en formant des excroissances bombées.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА—LITTÉRATURE CITÉE

[1] L. Binet et J. Magrou. C. R., t. 193, p. 115—117, 1931. [2] L. Binet et J. Magrou. Presse Médicale, I, p. 853—851, 1932. [3] F. S. Hammett. Protoplasma, Bd. VII, H. 3, S. 497—522, 1929. [4] F. S. Hammett and S. Reimann. J. éxp. Med., v. 50, № 4, 1929. [5] F. S. Hammett. Protoplasma, Bd. XIII, H. 2, S. 331—347, 1931. [5] F. S. Hammett. Proc. Amer. Philos. Soc., v. LXIX, № 4, 1930. [7] B. D. Morozow. C. R. Acad. Sci URSS, v. I, № 6, 1934; Journ. de Biol., v. III, f. 2, 1934 (russe). 1931. [9] S. Morgulis and D. E. Green. Protoplasma, Bd. XIV, S. 161—169, 1931, [8] F. S. Hammet and D. W. Smith. Protoplasma, Bd. XIII, H. 2, S. 261—267.

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

Г. Х. МОЛОТКОВСКИЙ

КАМЕРА ДЛЯ ГИГРОСКОПИЧЕСКОЙ БУМАЖКИ КОБАЛЬТОВОГО МЕТОДА УЧЕТА ТРАНСПИРАЦИИ

(*Представлено академиком А. А. Рихтером 15 XII 1934*)

Кобальтовый метод по своей простоте и удобству получил за последнее время широкое распространение в особенности при эколого-физиологических исследованиях. Из метода, дающего качественную оценку (Шталь) он в руках Ливингстона дал количественные показатели испарения, но не абсолютного порядка. Стремление Ливингстона, как равно Камерлинга ([1]), Ничипоровича ([2]) и др., получить с помощью этого метода абсолютные величины интенсивности транспирации, выраженные в весовых единицах, пока что не увенчались успехом.

Но кроме этого существенного недостатка кобальтовый метод имеет и ряд других, к которым необходимо отнести следующие:

1) Бумажка, прилегая непосредственно к эпидермису, при своей сухости и гигроскопичности изменяет ход транспирации в сторону ее увеличения.

2) Самое прикосновение бумажки должно влиять на чувствительный эпидермис и в особенности на замыкающие клетки устьиц, что усугубляет еще давление щипчиков, употребляемых для удержания бумажки на листе растения. Не улучшают положения щиппы, предложенные Ничипоровичем.

3) На скорость порозовения бумажки влияет влажность воздуха и его движение, ибо как мы плотно ни прикрываем ее щипчиками, воздух все-таки проникает под стеклышки последних. Кстати, in situ приходится часто преодолевать трудности через порывы ветра при самом наложении бумажки на лист. Не устраняют этот недостаток Glasklappen B. Maye ([4]).

5) Наконец, и самое загрязнение бумажки наступает от прикосновения ее к листу растения, особенно в местностях с высоким содержанием пыли в воздухе.

В нашей практике находил применение следующий способ, который устранял указанные недостатки.

Изготовляем, как это рекомендуется Ливингстоном, полоску бумажки из трех кусочков, связанных черным шелковым английским пластырем. Гигроскопический кусочек бумажки, пропитанный хлористым кобальтом, находится в середине, а стандартные по бокам. Эту гигроскопическую

сложную полоску приклеиваем по пластырю к покрывному стеклышку, обрезанному по размеру немного большему, чем бумажка. Далее вырезаем из кинематографической ленты полоску шириной в 1 мм и делаем из нее ободок, который, имея форму бумажки, должен вокруг краев плотно приставать к ней. Приклеиваем его ребром к стеклышку. Такую же целлулоидную полоску, но меньшей ширины, которая определяется опытно в зависимости от толщины бумажки, употребляем на изготовление четырехугольника, сообразно величине среднего пропитанного хлор-кобальтом кусочка бумажки, и приклеиваем его ребром к пластырю, который соединяет средний кусочек со стандартными боковыми, для чего еще раньше при склеивании кусочков несколько их отодвигаем друг от друга, имея ввиду, что малый и большой ободки после приклеивания должны быть на одном уровне. Склеивающим веществом является грушевая эссенция или водоупорный клей „Геркулес" производства промкооператива „Мосхимик", Москва.

Вместо хрупкого покрывного стеклышка, через которое наблюдаем за изменением окраски бумажки, употребляем листок белой слюды или целлулоид, растворяя для этой цели кинематографическую ленту в грушевой эссенции, чтобы получить из нее более тонкую и прозрачную пленку. Простота в изготовлении и пользовании на стороне последней. Теперь остается нашу маленькую целлулоидную камерку приложить к листу, что осуществляется через предварительное обмазывание целлулоидного ободка (можно вместе и большого) тоненьким слоем склеивающего вещества, каким в нашей практике был гусеничный клей „Тенгльфут" или каучуко-парафиновая замазка (3). Последнюю приготовлял из мелко нарезанного светлого каучука лучшего качества, взбалтывал с авиационным бензином и нагревал в теплом месте на песчаной бане. Через несколько дней, когда он примет сметанообразную консистенцию, к нему прибавляется на песчаной бане парафин из расчета на 150 г парафина 75 г каучукового раствора при помешивании палочкой до полного испарения бензина. Полученная замазка отличается большой липкостью, непроницаемостью и невысыхаемостью. Камеру с бумажкой, подсушенной в баночке с фосфорным ангидридом или же в жестяном цилиндре, подогреваемом спиртовой лампочкой, наносим пинцетом снова на то же самое место на листе, но с таким расчетом, чтобы края ободка попали точно на прежнее место, что легко удается, поскольку остаются следы от замазки на месте. Это важно, ибо имеется возможность благодаря этому подсчитать через отпечатки из желатины или коллодиума количество испарявших устьиц под камерой. Указанный факт делает кобальтовый метод более объективным по учету транспирации.

Весом в 0.05 г наша камера не нарушает нормального положения листа в пространстве.

Целый ряд наблюдений при сравнении скорости порозовения хлоркобальтовой бумажки на листе в нашей камере и под щипчиками типа Ливингстона показали, что в первом случае оно наступает скорее, что вполне понятно из предыдущих суждений. В нашем распоряжении были стандартные бумажки четырех тонов: bright-blue, medial-blue, pale-blue и pink-standard paper, а также cobalt-chloride paper, полученные из лаборатории Ливингстона.

Время Zeit	Температура по С Temperatur nach C	Дюбек 44 Dübek 44	Гавана 923 Havana 923	Американ 572 Amerikan 572
		Количество испаряющих устьиц под камерой Zahl der verdinstenden Spaltöffnungen unter der Kammer		
		6330	5720	4830
		Скорость порозовения бумажки в секундах * Geschwindigkeit des Roswerdens des Papiers in Sekunden*		
1934 г. Июль				
3	11.5	34.1	35.0	45.1
8	18.0	29.2	28.4	41.0
10	24.0	21.0	23.1	32.3
12	28.5	16.1	15.2	21.0
14	27.75	23.1	27.1	22.4
16	25 0	31.0	29.4	38.0

В таблице приведены результаты одного из наблюдений над табаком. Сорта высажены на одной небольшой делянке. Определение транспирации произведено на нижнем эпидермисе у верхушки листа 2-го яруса. Посадка ранняя.

Сельско-хозяйственный институт.
Житомир.

Поступило
15 XII 1934.

* Среднее из трех измерений. — Durchschnitt von drei Messungen.

KAMMER FÜR HYGROSKOPISCHE PAPIERSTREIFEN ZUR BESTIMMUNG DER TRANSPIRATION NACH DER KOBALTMETHODE

Von G. MOLOTKOVSKIJ

(*Vorgelegt von A. Richter, Mitglied der Akademie, d. 15. XII. 1934*)

ZUSAMMENFASSUNG

Wir stellen, wie es von Livingstone empfohlen wird, einen Papierstreifen aus drei Teilen her, die mittels eines schwarzen seidenen Trockenklebstreifens verbunden sind. Der mit einer Kobaltchlorürlösung getränkte hygroskopische Teil des Papierstreifens befindet sich in der Mitte, die Standardpapierstreifen dagegen an beiden Seiten. Dieses zusammengesetzte hygroskopische Papier kleben wir längs des Trockenklebstreifens an die Glasplatte, die etwas grösser als das Papier ist. Sodann wird aus einem Filmband ein 1 mm breiter Streifen geschnitten, der nach aussen geknickt, fest an einem Filmband die Ränder des Papierstreifens gelegt und mit der Schmalseite an die Glasplatte geklebt wird. Entsprechend der Dicke des Papiers wird hierauf ein Zelluloidstreifen verfertigt, aus welchem ein Viereck nach der Grösse des mittleren Papiers gemacht wird. Dieses klebt man mit seiner Schmalseite an den Trockenkleibstreifen, der den mittleren Streifen mit den an den Seiten befindlichen Standardpapierstreifen verbindet. Bei dem Zusammenkleben müssen wir die Streifen etwas voneinander schieben, wobei zu beachten ist, dass der kleine und der grosse Rand sich auf einer Linie befinden. Als Klebstoff wurde Birnenessenz und der wasserdichte „Herkules“ Leim (Fabrikat der Massenbetriebkooperativgesellschaft „Mosschimik“ in Moskau) verwendet. Anstatt der Glasplatte, durch welche wir die Veränderung der Färbung des Papiers beobachten, benutzen wir manchmal weisse Glimmer- oder Zelluloidblättchen. Wir legen die so erhaltene kleine Kammer an das Blatt an, nachdem wir vorher die Ränder mit einer dünnen Schicht Klebstoff bestrichen haben. Hierzu verwendeten wir in unserer Praxis Raupenleim „Tanglfoot“ oder Kautschukparaffinkitt. Die getrocknete Kammer tragen wir mit der Pinzette wieder auf dieselbe Stelle des Blattes, wobei die Ränder der Kammer genau auf die frühere Stelle kommen müssen was leicht zu machen ist, da der Kitt auf dem Blatte Spuren hinterlässt.

Das ist sehr wichtig, weil man so die Möglichkeit hat, die Zahl der verdunstenden Spaltöffnungen nach den Gelatine- oder Kolloidumabdrücken zu berechnen. Die Kammer mit einem Gewicht von 0.05 g ändert die normale Lage des Blattes im Raume nicht.

In der Tabelle (S. 340) sind die Resultate einer der Beobachtungen an Tabak angeführt.

Die Transpirationsbestimmung wurde auf der unteren Epidermis der Blattspitze der 2-ten Lage ausgeführt. Frühpflanzung.

Landwirtschaftliches Institut.
Shitomir.

Eingegangen
d. 15. XII. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] Z. Kamerling. Ber. Deutsch. Bot. Gesel., 31, 1913, 483—493. [2] А. А. Ничипорович. Журн. оп. агр. Ю.-В., III, в. II, 1927. [3] С. А. Гинзбург. Лаборат. практика, № 4, 1934. [4] Werner Maue. Angewandte Botanik, Bd. IX, 1927, Berlin.

ЭЗРАС АСРАТЯН

ВЛИЯНИЕ УСЛОВНОГО ОБОРОНИТЕЛЬНО-ДВИГАТЕЛЬНОГО РЕФЛЕКСА НА БЕЗУСЛОВНУЮ БОЛЕВУЮ РЕАКЦИЮ СОБАКИ

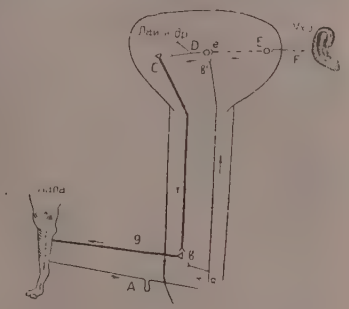
(*Представлено академиком И. П. Павловым 24 X 1934*)

По ходу моей работы в области физиологии условных рефлексов мне удалось наблюдать и подвергнуть специальному и подробному исследованию ряд моментов взаимно-индукционных отношений между условными и безусловными пищевыми рефлексами. Краткие сообщения о результатах были напечатаны в „Докладах“ (1934, т. II, №№ 1 и 2). Аналогичные взаимоотношения мною были наблюдены и изучены также между оборонительно-двигательными условными и безусловными рефлексами (о результатах я сообщил при публичной защите моей диссертации больше года тому назад). В частности, на ряде собак с пищевыми и оборонительно-двигательными рефлексами было установлено, что в известных временных пределах условные положительные рефлексы значительно ослабляют следующие за ними однородные безусловные рефлексы — и наоборот. В дальнейшей моей работе по оборонительно-двигательным условным рефлексам я подверг специальному исследованию одно замечательное явление из этого круга вопросов, которое мною было наблюдено еще раньше. В период времени 1932—1933 гг. по ходу выработки и изучению оборонительно-двигательных условных рефлексов на собаках „Баш“, „Кейо“ и в особенности на собаке „Назар“ я иногда наблюдал следующее странное и поражающее явление: в некоторых случаях, когда действие условного раздражителя вызвало очень бурную реакцию собаки (усиленная общая двигательная реакция собаки, бурный лай, визг и т. д.), применение индукционного электрического раздражения на этом фоне не только не усилило эту бурную реакцию, но даже в значительной степени ослабляло все ее компоненты, в особенности лай и визг. В работе с этими собаками условные раздражители изолированно действовали лишь в течение 5 сек., и это явление, как говорилось, наблюдалось не регулярно.

В 1933—1934 гг. у новой собаки „Чинар“ я вырабатывал запаздывающий оборонительно-двигательный условный рефлекс на единственный раздражитель — звонок. В течение 1 мин. звонок действовал один, затем к нему присоединилось раздражение левой задней лапы индукционным током; это комбинированное действие двух раздражений длилось 5—6 сек. Время действия раздражителей и рефлексы регистрировались на кимографической ленте. Параллельно велось очное наблюдение. В силу того, что звуконепроницаемая камера, в которой находилась подопытная собака, была радиофицирована, — я имел возможность по ходу опыта следить также за голосовой реакцией собаки (лай, визг, скуление).

„Чинар“, молодая и живая собака, по сравнению с вышеупомянутыми моими собаками, является более возбудимой собакой. Условный оборонительный рефлекс на звонок образовывался быстро, но запаздывание, т. е. более или менее значительное удлинение скрытого периода появления условного рефлекса, образовывалось очень медленно и поздно. Явление, о котором будет итти речь, с достаточным постоянством наблюдалось почти с момента укрепления условного рефлекса на звонок и в течение всего 4—5-месячного периода работы с ней.

При минутном изолированном действии звонка „Чинар“ развивала страшно бурную реакцию; рвалась всем телом, сгрызла цепочку, лямки, станок, все что попало в поле вращения головы. Своими сильными и хаотическими движениями она не один раз поломала прикрепленную к ее лапе установку для регистрации рефлексов. Вместе с этим она изо всех сил лаяла, скулила, визжала. Эта картина бурных явлений волнообразно, с небольшими перерывами, в первое время длилась во все время минутного действия звонка; позже, по ходу работы, параллельно с образованием запаздывания, она развивалась только в последние 40—35 сек.; при этом, чем ближе к моменту раздражения электрическим током, тем эта реакция все усиливалась. И вот, когда на фоне этих вулканических явлений производилось раздражение электрическим током, происходило резкое ослабление, иногда полное прекращение голосовых реакций, лицо приняло спокойный вид, исчезло насильственное перенапряжение всего тела и мускулатуры лица, прекращались движения всех нераздражаемых лап, и только раздражаемая левая задняя лапа делала свое надлежащее флексорное движение. Отдельное раздражение электрическим током той же силы, без предшествующего действия звонка, вызвало бурную реакцию. Затем, если почему-либо звонок не вызвал бурную условную реакцию, электрическое раздражение не только не ослабляло, но даже резко усиливало болевую реакцию собаки. Если же звонок вызывал очень бурную условную реакцию и я подкреплял рефлекс электрическим раздражением не обычной силы, а значительно сильнее обычного, то опять реакция собаки не ослаблялась, иногда даже усилялась.



Схематическое изображение взаимодействия рефлексов. — Diagram illustrating the interaction of reflexes.

Эти явления неоднократно были продемонстрированы акад. И. П. Павлову, а также многим работникам лаборатории (д-ру Линдбергу, д-ру Малкиману, проф. Подкопаеву, д-ру А. М. Павловой, тов. Васютину и другим). Моим товарищам по лаборатории явления эти были продемонстрированы извне камеры, т. е. они сидели рядом со мной, через глазок могли наблюдать на собаку и по радио слушать ее голосовые реакции. Почти всегда демонстрации были удачными. Акад. И. П. Павлов, по обыкновению, при опыте сидел в камере, рядом с собакой. Первые два раза эти явления при некоторых начальных пробах вовсе не получились, а в конце получились в очень слабом виде. Очевидно, непривычная обстановка опыта для реактивной собаки была причиной смазывания описанных выше явлений. Затем они в очень демонстративном виде получились даже в условиях присутствия акад. И. П. Павлова в камере. Физиологическую сторону дела сейчас я себе представляю в следующем пока еще схематическом виде (для ясности изложения я буду пользоваться очень упрощенной схемой рефлекторных дуг, изображенной на рисунке).

1) При действии условного раздражителя — звонка происходит возбуждение всех звеньев, всех рефлекторных дуг условно-рефлекторной целостной и комплексной оборонительной реакции, включая сюда эфферентные части дуг соответствующих безусловных рефлексов. Этим обусловливаются лай, визг, экскреторные и инкреторные изменения в орга-

низме, сложная двигательная оборонительная реакция и т. д. В частности возбуждается дуга специально регистрируемого условно-рефлекторного движения задней левой лапы $F \rightarrow E \rightarrow e' \rightarrow C \rightarrow G$.

2) От этого, в силу отрицательной индукции, понижается возбуждаемость афферентной (и коннекторной?) части рефлекторных дуг безусловной сложной реакции. В случае нашего регистрируемого рефлекса возбуждение $F \rightarrow E \rightarrow e'$ отрицательно индуцирует $A \rightarrow B \rightarrow b'$.

На это, по моему, указывает тот факт, что после сильных условных реакций на некоторое время порог раздражения безусловного рефлекса повышается и рефлексы на индукционный ток средней силы ослабляются (мои прежние данные, подтвержденные на этой собаке).

3) На фоне пониженной возбудимости афферентной части (рефлекторной) дуги действие безусловного раздражителя (электрический ток) такой силы, которое раньше само по себе вызывало бурную оборонительную реакцию собаки, теперь вызывает более слабую реакцию.

4) Однако, это без остатка не объясняет всей сложности явлений. Почему, например, при сочетательном действии обоих раздражителей прекращается бурная картина и собака успокаивается. Возможны два объяснения: a) безусловное раздражение, недостаточное для вызова общей бурной реакции по корковой дуге ($A \rightarrow B \rightarrow b' \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow g$) достаточно для того, чтобы вызвать слабую изолированную реакцию по спинальной дуге ($A \rightarrow B \rightarrow b \rightarrow g$); а возбуждение спинальной дуги своим чередом отрицательно индуцирует корковый условный аппарат ($E \rightarrow e$) и прекращает обусловленную им бурную реакцию. Это является наиболее вероятным объяснением. Другое, менее вероятное объяснение следующее: b) безусловное раздражение возбуждает афферентную часть безусловно-рефлекторной дуги, это возбуждение дальше идет по двум руслам: по спинномозговой дуге и по корковой дуге. (По схеме они будут $A \rightarrow B \rightarrow b \rightarrow g$) и ($A \rightarrow B \rightarrow \rightarrow b' \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow g$). Причем по первому руслу возбуждение продвигается беспрепятственно, а по второму руслу в звене D оно встречается с потоком возбуждения, идущим от условного раздражения ($F \rightarrow E \rightarrow e'$). Очевидно тут происходит стык, явление, подобное тому, что некоторыми физиологами (Schitt, Herten, Цион и др.) исследовалось и описывалось как интерференция волн возбуждения, в результате чего возникает торможение в разветвленном звене D и C, которое обуславливает резкое ослабление и, порой, полное прекращение бурной болевой условной реакции (успокоение, прекращение лая и т. д.).

5) В пользу торможения в силу индукции или от интерференции (не в физическом смысле слова) волн возбуждений примерно одинаковой силы, а не торможения от суммирования возбуждений (запредельное торможение или pessimum), говорят следующие факты: a) увеличение силы раздражающего электрического тока не только не ослабляет, но даже усиливает бурную картину реакции; b) если условный раздражитель почему-либо не вызывает бурную реакцию, а вызывает умеренную реакцию то электрическое раздражение вовсе не ослабляет эту реакцию и даже усиливает ее. Говоря иначе, для того, чтобы происходило описанное явление ослабления условной бурной реакции под влиянием электрического раздражения, требуется некоторое относительное равенство сил условного и безусловного возбуждений, что повидимому является необходимым для взаимной индукции (или для интерференции), но вовсе не является необходимым для суммации.

Физиологический институт.
Академия Наук СССР. Ленинград.

Поступило
24 X 1934.

THE INFLUENCE OF A CONDITIONED MOTOR DEFENSIVE REFLEX ON AN UNCONDITIONED REACTION OF A DOG TO PAIN

By E. HASRATIAN

(*Communicated by I. Pavlov, Member of the Academy, 24. X. 1934*)

In the course of my work in the domain of physiology of conditioned reflexes I succeeded in observing and subjecting to special and detailed investigations a series of phenomena in the reciprocal inductions between conditioned and unconditioned food reflexes. The results attained were reported in „Comptes Rendus de l' Académie des Sciences de l'URSS" (1934, v. II, Nos 1 and 2). Analogous interrelations were likewise observed and studied by me between the motor defensive conditioned and unconditioned reflexes (I stated these results during the public defense of my thesis a year ago). It was established by experiments on a number of dogs with food and motor defensive reflexes that within certain time limits positive conditioned reflexes considerably weaken similar unconditioned reflexes following them, and *vice versa.*

In my further work on motor defensive conditioned reflexes I subjected to a special investigation one remarkable phenomenon of this class of problems, which had been observed hy me earlier.

In 1932—1933, in the course of the development and study of motor defensive conditioned reflexes in the dogs „Bash", „Keiyo" and, especially, „Nasar", I sometimes noticed the following strange and astonishing phenomenon: in some cases, when the action of the conditioned stimulus produced a very violent reaction in the dog (a heightened general motor reaction of the dog, vigorous barking, yelping, etc.), the application of an induced electric stimulus not only did not increase this violent reaction, but, on the contrary, considerably weakened all its components, especially the barking and yelping. In my work with these dogs the conditioned stimuli acted during only 5 seconds, and, as has been mentioned, this phenomenon was not regularly observed.

In 1933—1934, I was establishing in a new dog „Chinar" a retarded motor-defensive conditioned reflex in response to a single stimulus — bell.During one minute the bell acted alone, and then the irritation of the left hind leg by an induced current was added; this combined action of two stimuli lasted for 5 or 6 seconds. The time of action of the stimuli and reflexes was recorded on a kymograph ribbon. Visual observations were simultaneously carried on. As the sound-proof chamber wherein the experimental dog was confined had a microphone, I could also note during the course of the experiment the vocal reactions of the dog (barking, yelping, whining).

„Chinar" is a young, lively dog and, as compared with the above-named dogs, it is more excitable. The conditioned defensive reflex in response to bell was quickly established, but the retardation, i. e. a more or less considerable lengthening of the latent period of the appearance of the conditioned reflex, developed very slowly and rather late. The phenomenon to be discussed was observed with sufficient regularity almost from the very moment of the stabilization of the conditioned reflex in response to bell and during all the 4 or 5 months of my work with this dog.

During a minute's isolated action of the bell „Chinar" developed a most violent reaction; it struggled forward, gnawed its chain, its harness, the frame, in fact all it could reach at with its teeth. Many times did it break with its violent and chaotic movements the appliance for recording reflexes which was fixed to its leg. At the same time, it barked, whined, and yelped at the top of its voice. These violent phenomena at first continued wave-like with small intervals during the whole minute of the bell's action; later on, in the course of the experiment, parallel with the formation of retardation, they were to be observed only during the last 40—35 seconds, this reaction being the more violent the nearer the moment of the application of the electric current. When the electric current stimulus was applied in the presence of such violent phenomena there occurred a marked weakening and even sometimes a full interruption of the vocal reactions, the dog's face took on a quiet look, the overstrain of the whole body and facial muscles disappeared, the movements of all the unstimulated legs ceased, and only the stimulated left hind foot continued to make a flexion movement. An isolated electric current stimulus of the same strength but unpreceded by the bell stimulus, excited a violent reaction. Also, if for some reason or other the bell did not excite a violent conditioned reaction, the electrical stimulus not only did not weaken, but, on the contrary, increased the reaction to pain in the dog. If the bell excited a very violent conditioned reaction, and if I reinforced the reflex by an electric stimulus of a considerably greater strength than usual, the reaction in the dog showed no weakening and sometimes even grew stronger.

These phenomena were many times demonstrated by me before I. Pavlov and many other workers of our laboratory (Dr. Lindberg, Dr. Malkiman, Prof. Podkopajev, dr. Pavlova, comrade Vasiutin, and others). My colleagues were shown these phenomena from outside the cell, i. e., they sat by my side, could observe the dog through a peep-hole, and listen to its vocal reactions. The demonstrations were almost always successful. I. Pavlov, according to his custom, sat during the experiment in the cell, side by side with the dog. During the first two sessions these phenomena at first did not occur at all, and towards the end occurred in a very feeble form. The environment unfamiliar to the dog subject seems to be the cause of the absence of the above-described phenomenon. But later on it did occur in a very clear form, even with Pavlov in the cell.

For the present, I conceive the physiological aspect of the phenomenon to be as follows (for the sake of clarity I shall make use of a very simplified scheme of the reflex arcs shown in the diagram, p. 343).

1) Under the action of the conditioned stimulus, the bell, there occurs an excitation of all the links, all the reflex arcs of the conditioned reflex defensive reaction, including the efferent parts of the arcs of the corresponding unconditioned reflexes. This explains the barking, yelping, excretory and incretory changes in the organism, the complicated motor defensive reaction, and so on. In particular, the arc of the specially recorded conditioned-reflex movement of the left hind leg $F \rightarrow E \rightarrow e' \rightarrow C \rightarrow G$ was also stimulated.

2) Hence, as a result of negative induction, the excitability of the afferent (and connecting) part of the reflex arcs of the unconditioned complex reaction decreases. As regards the reflex recorded, the excitation $F \rightarrow E \rightarrow e'$ negatively induces $A \rightarrow B \rightarrow b'$.

This, as it seems to me, is indicated by the fact that after strong conditioned reflexes the threshold of stimulation of unconditioned reflex tempo-

rarily rises, and the reflexes to an induced current of average strength are more feeble (my former data, corroborated on this dog).

3) In the presence of a lowered excitability of the afferent part of the reflex arc, the action of an unconditioned stimulus (electric current) of a strength that formerly stimulated by itself a violent defense reaction in the dog, now stimulated a weaker one.

4) This, however, does not fully explain all the complexity of these phenomena. Why, for instance, under the combined action of both stimuli do the violent phenomena cease and the dog calms down? Two explanations are possible: a) an unconditioned stimulation, being insufficient for the excitation of a general violent reaction along the cortical arc ($A \rightarrow B \rightarrow b' \rightarrow D \rightarrow \rightarrow C \rightarrow g$), suffices to excite a weak isolated reaction along the spinal arc ($A \rightarrow B \rightarrow b \rightarrow g$); while the excitation of the spinal arc in its turn induces negatively the cortical conditioning apparatus ($E \rightarrow e$) and interrupts the violent reaction caused by it. This is the most probable explanation. Another, less probable one, is the following: b) the unconditioned stimulus excites the afferent part of the unconditioned reflex arc, this excitation proceeds further along two channels: along the spinal cord arc and the cortical arc. (In the scheme these will be $A \rightarrow B \rightarrow b \rightarrow g$ and $A \rightarrow B \rightarrow b' \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow g$.) Along the first path the excitation proceeds unhindered, but along the second it meets in the link D with a stream ef excitation coming from the conditioned stimulus ($F \rightarrow E \rightarrow e'$). Evidently there occurs a collision here, a phenomenon similar to the one investigated and described by some physiologists (Schift, Herzen, Zion, and others) as the interference of excitation waves, which results in an inhibition in the branched link D and C, and leads to a marked weakening, and sometimes full interruption of the violent conditioned reaction (the dog calms down, stops barking, etc.).

5) Inhibition by induction or interference (not in the physical sense) of excitation waves of approximately equal strength, as opposed to inhibition by summation of excitations (superlimit inhibition or pessimum), is favoured by the following facts: a) an increase in the strength of the stimulating electric current not only does not weaken the reaction, but, on the contrary, even increases it; b) if the conditioned stimulus for some reason or other does not stimulate a violent reaction but only a moderate one, then the electric current, instead of weakening the reaction, increases it. In other words, in order to cause the weakening of the violent conditioned reaction by an electric stimulus, it is necessary that there should exist a certain approximate equality in strength of the conditioned and unconditioned excitations, which is essential for reciprocal induction (or interference), but is quite unnecessary for summation.

Physiological Institute.
Academy of Sciences of the USSR. Leningrad.

Received
24. X. 1934.

С. А. ЧЕРНОВ

ДВА ПРЕДСТАВИТЕЛЯ РОДА *OLIGODON* (*OPHIDIA, COLUBRIDAE*) В СОВЕТСКОМ СОЮЗЕ

(*Представлено академиком С. А. Зерновым 8 XII 1934*)

Род *Oligodon* объединяет около 70 видов ([12]), распространенных в Индии, Индо-Китае, Сиаме, Южном Китае, на о. Цейлоне, Индо-Малайском архипелаге, Филиппинских о-вах и о. Формоза. Только один вид — *Oligodon melanocephalus* Jan., представляя исключение, распространен в Нижнем Египте, Синайском п-ве, Палестине, Сирии и юговосточной части М. Азии. До настоящего времени представители этого рода не были известны из пределов СССР.

9 VII 1933 Нахичеванская экспедиция Зоологического института Академии Наук СССР добыла в г. Ордубате (Нахичеванская автономная республика) небольшую длиной в 198 мм змейку.* Эту змейку по ее пластическим особенностям, окраске и рисунку головы следовало отнести к описанному А. Никольским из Мегри, селения, расположенного в 22—23км к западу от г. Ордубата, виду *Contia satunini* ([5]). Но, так как и сам А. Никольский не был уверен в принадлежности *Contia satunini*, равно как и другого описанного им вида *Contia transcaspica*, к роду *Contia* ([6]), я произвел ревизию этих двух видов. Исследование как типа *C. satunini* (к сожалению тип несколько высох, а черные пятна на голове выцвели и стали буро-красного цвета), так и экземпляра из Ордубата отчасти подтвердило предположение А. Никольского, так как в действительности оба наши экземпляра принадлежат не к роду *Contia*, а к упомянутому выше роду *Oligodon*. У наших экземпляров выражены все характерные для этого последнего рода внешне-морфологические особенности: слабо отделена от шеи голова, большой, сильно вдающийся между межносовыми межчелюстной щиток, очень широкий лобный и пр. (см. фиг.). Что касается верхнечелюстных зубов, то и не изготовляя скелета головы можно видеть что у *C. satunini* они увеличиваются по направлению вглубь рта и что задние несколько сжаты с боков. Количество верхнечелюстных зубов не превышает 10.

Из всех известных мне, как по коллекционным материалам, так и по литературным данным, видов р. *Oligodon* наши экземпляры наиболее близки к *Oligodon melanocephalus* Jan. и отличаются от последнего главным образом только описанным А. Никольским ([5]) и Ф. Вернером ([10, 11]) рисунком головы. Кроме того у обоих экземпляров по 7 верхнегубных щитков, тогда как у просмотренных мной экземпляров *Oligodon melanocephalus* из Палестины и Сибири по 6 верхнегубных с каждой стороны. Отмечу, что на рисунке головы этого вида у Г. Джана и Ф. Сорделли ([8]) так же изображено 6 верхнегубных, тогда как Буланже ([1]) указывает 7 верхнегубных. У экземпляра из Ордубата 2 заглазничных щитка, а не один, как у типичного экземпляра *Contia satunini* и у *Oligodon melanocephalus*.

Описанный Ф. Вернером ([10]) из Адана (ю.-в. М. Азии) *Oligodon melanocephalus* var. *septentrionalis*, равно как и приводимая им из Персии (про-

* Этот экземпляр доставлен в Зоологический институт Академии Наук участником экспедиции аспирантом Института А. Афанасьевым, которому я приношу благодарность.

винция Фарс) *Contia satunini* (11), поскольку можно судить по описаниям, несомненно принадлежат к той же форме, что и наши экземпляры.

Приводимая таблица измерений иллюстрирует сказанное.

Таким образом, вырисовывающийся ареал распространения этой, пока известной всего лишь по 4 экземплярам, формы охватывает территорию лежащую на север и северо-восток от ареала *Oligodon melanocephalus* Jan. Безусловная близость ее к последнему заставляет меня считать эту форму подвидом *Oligodon melanocephalus* Jan. Так как *Oligodon melanocephalis* var. *septentrionalus* Werner, 1905, идентичен с *C. satunini* Nik., то этот подвид должен быть назван *Oligodon melanocephalus satunini* (Nik.).

A *B*

A — Oligodon melanocephalus satunini (Nik.) (№ 13408), *B — Oligodon melanocephalus melanocephalus* Jan. (Сирия).
Увеличено.

Если предыдущая форма принадлежит к единственному западному (сирийскому) виду р. *Oligodon*, то относящаяся так же к этому роду описанная А. Никольским (6) *Contia transcaspica* представляет в нашей фауне один из распространенных в Индии видов. Сравнение типа *Contia transcaspica* Nik. (№ 9869 кол. Герпет. отд. ЗИН) с до сих пор известными видами р. *Oligodon* привело меня к заключению, что этот экземпляр должен быть отнесен к виду *Oligodon taeniolatus* (Jerd.) (=*O. subgriseus* D. et B.)* Как известно, рисунок и окраска тела у *Oligodon taeniolatus* (Jerd.) весьма изменчива. Ф. Уолл (9) в своем обзоре индийских представителей р. *Oli-*

Экземпляры Specimens	L	L. cd.	Sq.	Ventr.	Scd.	Lab.	Temp.	Post. oc.	Рисунок головы Markings on the head
Typus *Contia satunini* Nik. № 9343	185	31	15	223	61	7	1+1	1	У всех этих экземпляров рисунок на верхней поверхности головы одинаков (см. фигуру). All these specimens have identical markings on the upper surface of the head (see the figure)
Contia satunini № 13408	198	36	15	206	64	7	1+1	2	
Contia satunini Nik. [Persia, Werner (11)]	162	28	15	202	60	?	1+1	1	
Oligodon melanocephalus var. *septentrionalis* Wern.	?	?	15	215	59		1+1	1	

* Я согласен с Ф. Уоллом(8) что за этим видом должно быть удержано название данное Джердоном(4). Джердон описал эту змейку под именем *Coronella taeniolata* в Journ. Asiat. Soc. Beng. (vol. 22, № 6), вышедшем из печати в 1853 г., тогда как Дюмериль и Биброн описали этот же вид как *Oligodon Sub-griseum* в вышедшем в 1854 г. т. VII Erpétologie générale.

godon различает 4 цветовых вариации. Наш копетдагский экземпляр по своей окраске и рисунку больше всего похож на var. *fasciatus* Günther (2) [45 поперечных неправильных полос на туловище и 11 на хвосте, см. в основном правильное изображение нашего экземпляра на табл. IV работы А. Никольского (7)], но брюхо одноцветно и не имеет описанных Гюнтером пятнышек. Копетдагский экземпляр имеет и еще некоторые особенности. Именно, у него уменьшено количество верхнегубных щитков, и глаза касается только один из них — 3-й (а не 4-й, как изображено на упомянутой выше таблице). Такие случаи, впрочем, констатированы и у экземпляров из Индии. Я насчитываю у нашего экземпляра 6 верхнегубных, а не 5 как указано в описании А. Никольского, так как щиток, считаемый этим автором за нижний височный первого ряда, есть в действительности недоходящий до края рта предпоследний верхнегубной. Об этом говорит форма, величина и расположение его. На упомянутой таблице этот щиток изображен неправильно. В действительности он имеет другую форму и отделен от нижнего заглазничного настоящим височным щитком. Ф. Уолл (8) имел в своем распоряжении экземпляр *O. taeniolatus* с недоходящим до края рта предпоследним верхнегубным. Таким образом приведенные особенности копетдагского экземпляра не колеблют нашего вывода об идентичности *C. transcaspica* Nik. с *Oligodon taeniolatus* (Jerd.).

Факт нахождения в Копет-даге *Oligodon taeniolatus*, до сих пор известного с о. Цейлона и Индии (самые западные местонахождения относятся к Синду и Белуджистану), столь далеко на северо-запад от основного ареала, безусловно не лишен интереса, а присутствие там этого вида еще более подчеркивает имеющуюся между герпетофауной Индии и Закаспия связь.

Зоологический институт.
Академия Наук СССР.
Ленинград.

Поступило
8 XII 1934.

ZOOLOGY

TWO SPECIMENS OF THE GENUS *OLIGODON* (*OPHIDIA, COLUBRIDAE*) IN THE SOVIET UNION

By S. ČERNOV

(*Communicated by S. Zernov, Member of the Academy, 8. XII. 1934*)

The genus *Oligodon* comprises about 70 species (12) distributed in India, Indo-China, Siam, Southern China, Ceylon, Indo-Malayan archipelago, Philippine Islands, and Formosa. Only one species — *Oligodon melanocephalus* Jan. is, as an exception, found in Lower Egypt, Sinai peninsula, Palestine, Syria, and south-east part of Asia Minor. Up to the present time the representatives of this genus have not been known in the USSR.

On the 9th of July, 1933, the Nakhichevan Expedition of the Zoological Institute of the Academy of Sciences of the USSR obtained in the town of Ordubat (Nakhichevan Autonomous Republic) a small snake*, of

* This specimen has deen delivered to the Zoological Institute of the Academy of Sciences by a participant of the expedition, the Institute's aspirant, A. Afanasjev, to whom I express my gratitude.

198 mm length). This snake, from its plastical peculiarities, the colour, and the markings on its head should be referred to the species *Contia satunini* [5] described by A. Nikolsky, from Megri—a village located 22 or 23 km west from Ordubat. But, as A. Nikolsky himself was not sure that *Contia satunini*, as well as the other species described by him — *Contia transcaspica* — belonged to the genus *Contia* [6], I examined these two species. The examination of the type *C. satunini* (to our regret the specimen was somewhat dried out and the black spots on its head were faded and had become of brown-red colour), as well as the specimen from Ordubat, confirmed A. Nikolsky's misgivings, as, in fact, both our specimens belong, not to the genus *Contia*, but to the above-mentioned genus *Oligodon*. Our specimens posesses all the external morphological characters typical for this genus: the head is but slightly separate from neck, a large rostral, considerably protruding between the internasals, a very broad frontal, etc. (see the figure). Even on the unprepared skull it can be seen that the teeth of the upper jaw increase in size from before backward, and that the posterior ones are compressed. The number of the teeth of the upper jaw does not exceed 10.

Of all the species of the genus *Oligodon* known to me, both from collected materials and from literary data, our specimens are nearest to the *Oligodon melanocephalus* Jan. and differ from the latter principally only in the markings on the head described by A. Nikolsky [5] and F. Werner [10, 11]. Besides this, both specimens have 7 upper labials each, while the specimens of *Oligodon melanocephalus* examined by me from Palestine and Syria had 6 upper labials on each side. It is to be noted that in the figure of the head of this species by G. Jan. and F. Sordelli [3], there are also drawn 6 upper labials, whereas Boulenger [1] shows 7 upper labials. The specimen from Ordubat has 2 postoculars, and not one as the typical specimen of *Contia satunini* and *Oligodon melanocephalus* have.

Oligodon melanocephalus var. *septentrionalis*, described by. F. Werner [10] from Adan (S.-W. of Asia Minor), as well as *Contia satunini* [11] mentioned by him as found in Persia (province of Fars), as far as can be judged by the descriptions, belong undoubtedly to the same type as our specimens.

The table of measurements shown on p. 349 illustrates the above.

Thus, the apparent range of distribution of this type, known so far by only 4 specimens, embraces the territory lying northward and northeastward from the range of distribution of *Oligodon melanocephalus* Jan. Its absolute nearness to the latter induces me to consider this type a subspecies of *Oligodon melanocephalus* Jan. As *Oligodon melanocephalus* var. *septentrionalis* (Werner, 1905) is identical with *C. satunini* Nik., this subspecies should be named *Oligodon melanocephalus satunini* (Nik.).

If the preceding type belongs to the single western (Syrian) species of the genus *Oligodon*, then *Contia transcaspica* referred to the same genus and described by A. Nikolski [6] is, in our fauna, one of the species distributed in India. Comparison of the type *Contia transcaspica* Nik. (No 9869 col. Herpet. Dept Zool. Inst.) with the so far known species of the genus *Oligodon* has driven me to the conclusion that this specimen should be referred to *Oligodon taeniolatus* (Jerd.) (= *O. subgriseus* D. et B.)*

As is well known, the markings and body colouring of *Oligodon taeniolatus* (Jerd.) are quite various. F. Wall [9], in his survey of Indian species

* I agree with F. Wall [8] that this species must retain the name given by Jerdon [4]. Jerdon described this snake under the name of *Coronella taeniolata* in No 6, vol. 22 of the Journ. Asiat. Soc. Beng. published in 1853, whereas Duméril and Bibron described the same species as *Oligodon Subgriseum* in vol. VII of the „Erpétologie générale", 1854.

of the genus *Oligodon*, distinguishes 4 colour varieties. Our specimen from Kopet-Dag in its colouring and marking is similar, most of all, to the var. *fasciatus* Günther (2) [45 transverse uneven bands on the body and 11 on the tail; see the more or less correct drawing of our specimen in Table IV, made by A. Nikolsky (7)], but the belly is of one colour and has no spots, such as are described by Günther. The specimen from Kopet-Dag has certain other peculiarities. Namely, it has a decreased number of upper labials, and only one of them touches the eye — that is the 3rd (and not the 4th, as shown in the above-mentioned table). Such cases, nevertheless, have been reported also in Indian specimens. I count in our specimen 6 upper labials, and not 5 as shown in A. Nikolsky's description, inasmuch as the upper labial counted by this author for a lower temporal of the first row is, in fact, the penultimate upper labial that does not reach the edge of the mouth. Its form, size, and position confirm this. In the table mentioned, this upper labial is shown incorrectly. In fact, it has different form and is separated from the lower postocular by a true temporal. F. Wall (8) has at his disposal a specimen of *O. taeniolatus* with the last but one upper labial not reaching the edge of the mouth. Thus, the peculiarities cited of the specimen from Kopet-Dag do not make us hesitate to draw a conclusion of the identity of *C. transcaspica* Nik. with *Oligodon taeniolatus* (Jerd.).

The fact of finding in Kopet-Dag *Oligodon taeniolatus*, known up to the present time in Ceylon and in India (the western limits of its range having been attributed to Sind and Belujistan), so far to the north-west from its basic range, is certainly not without interest, and the existence there of this species still more strongly emphasizes the relation existing between the reptiles of India and those of the Transcaspian region.

Zoologcial Institute,
Academy of Sciences of the USSR.
Leningrad.

Received
8. XII. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] G. Boulenger. Catalogue of the Snakes Brit. Mus., vol II, 1894, p. 246. [2] A. Günther. Rept. Brit. India, 1864, p. 208, pl. XIX, fig. D, D'. [3] G. Jan et F. Sordelli. Iconographie gèner. d. Ophidiens, livr. 13, pl. III, fig 4, 1865. [4] T. Jerdon. Journ. Asiat. Soc. Bengal, vol. XXII, 1853, p. 528. [5] А. Никольский. Ежег. Зоол. муз. Акад. Наук, IV, 1899, стр. 449. A. Nikolsky. Ann. Mus. Zool. Acad., Sci., 1899. vol. IV, p. 449. [6] Ibid. Ежег. Зоол. музея Акад. Наук, VIII. 1903, стр. 11. Ibid. Ann. Mus. Zool. Acad. Sci., vol. VIII, 1903, p. 11. [7] Ibid. Фауна России. Reptilia, т. 2 1916. Ibid. Faune de la Russie, Reptilia, vol. 2, 1916. [8] F. Wall. The Snakes of Ceylon. 1921, p. 339. [9] Ibid. Record Ind. Mus. Calcutta, vol. 25, 1923, pp. 305—334, [10] F. Werner. Zool. Anz., Bd. 29. 1905, p. 411. [11] Ibid. Verhandl. zool.-botan. Ges. Wien, Bd. LXVII, 1917, p. 214. [12] Ibid. Zool. Jahrb., Bd. 57, H. 1/2, 1929, p. 131—141.

Поправка. В статье члена-корреспондента Академии Наук СССР А. А. Иванова, помещенной в Докладах Академии Наук СССР (1935, том I, № 1) в табл. 3 на стр. 14 вместо ♂ 178 43 3.87 следует ♂ 178 48 3.87.

Errata. Dans la note du prof. A. Ivanov, membre correspondant de l'Académie des Sciences de l'URSS (1935, vol. I, № 1), au tableau 3 p. 14 au lieu de ♂ 178 43 3.87 lire ♂ 178 48 3.87.

Поправка. В № 4 Докладов Академии Наук (1935, т. I) в подписи к статье К. В. Никольского на стр. 212 вместо „Математический институт им. В. А. Стеклова" следует „Физический институт им. П. Н. Лебедева".

Berichtigung. In № 4 dieser Zeitschrift (1935, Bd. I) soll am Ende des Aufsatzes von K. Nikolskij, S. 213, anstelle von „Stekloffsches mathematisches Institut" stehen „Lebedewsches physikalisches Institut".